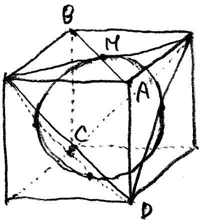
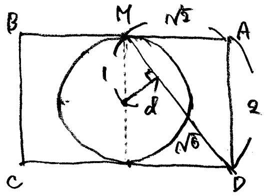
理系発展演習 11. 体積(2)

1

正四面体は等面四面体より図のような立方体にうめこむことができる
球は図の立方体の1稜接球であるから正四面体の1辺の長さは$2\sqrt{2}$



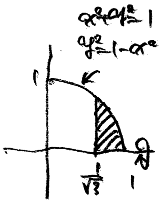


球の中心から正四面体の1つの面までの距離 d は

$$d=\frac{1}{\sqrt{6}}\times\sqrt{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

← 体積を利用して(四面体の)内接球の半径として求めてもよい

よって求める体積 V は

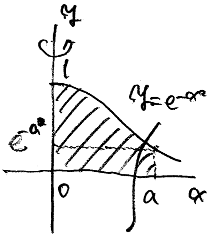


$$V=4\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\pi y^2\,dx$$
$$=4\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}(1-x^2)\,dx$$
$$=4\pi\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}$$
$$=4\pi\left\{\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)\right\}$$
$$=4\left(\frac{2}{3}-\frac{8\sqrt{3}}{27}\right)\pi$$

<point> 1. 回転体の体積

2

(1)

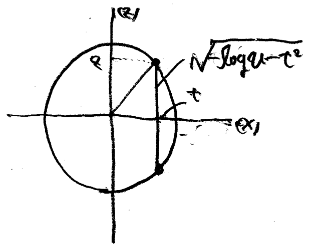


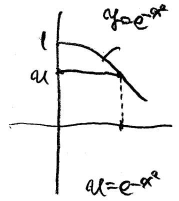
$$V=\int_{e^{-a^2}}^{1}\pi x^2\,dy+\pi a^2e^{-a^2}$$
$$=-\pi\int_{e^{-a^2}}^{1}\log y\,dy+\pi a^2e^{-a^2}$$
$$=-\pi\left[y\log y-y\right]_{e^{-a^2}}^{1}+\pi a^2e^{-a^2}$$

$\Leftrightarrow -x^2=\log y$
$x^2=-\log y$

$$=-\pi\left\{a^2e^{-a^2}-1+e^{-a^2}\right\}+\pi a^2e^{-a^2}$$
$$=(1-e^{-a^2})\pi$$

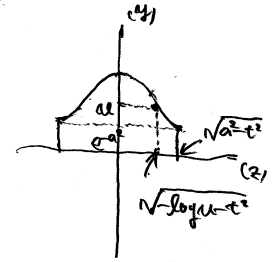
(2) A を $y=u\ (e^{-a^2}\leqq u\leqq 1)$ で切ると



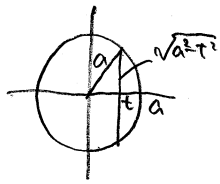


$u=e^{-x^2}$
$-x^2=\log u$
$x^2=-\log u$

$x=t\ (-a\leqq t\leqq a)$ で切ると



$0\leqq u\leqq e^{-a^2}$ のとき



$$\begin{cases} y=u \cdots ① \\ z=\sqrt{-\log u-t^2} \cdots ② \end{cases}$$

②より

$z^2=-\log u-t^2$
$\log u=-z^2-t^2$
$\therefore u=e^{-z^2-t^2}$ $\quad\therefore y=e^{-z^2-t^2}$

よって

$$S(t)=\int_{-\sqrt{a^2-t^2}}^{\sqrt{a^2-t^2}}e^{-z^2-t^2}\,dz\leqq\int_{-a}^{a}e^{-(s^2+t^2)}\,ds \text{ は}$$

$(e^{-(s^2+t^2)}>0,\ \sqrt{a^2-t^2}\leqq a)$

(3)

$$S(t)\leqq\int_{-a}^{a}e^{-(s^2+t^2)}\,ds$$
$$=e^{-t^2}\underbrace{\int_{-a}^{a}e^{-s^2}\,ds}_{\text{定数}}$$

$$\underbrace{\int_{-a}^{a}S(t)\,dt}_{=V}\leqq\int_{-a}^{a}e^{-s^2}\,ds\cdot\int_{-a}^{a}e^{-t^2}\,dt$$

$$\therefore (1-e^{-a^2})\pi\leqq\left(\int_{-a}^{a}e^{-x^2}\,dx\right)^2$$

$$\therefore \sqrt{(1-e^{-a^2})\pi}\leqq\int_{-a}^{a}e^{-x^2}\,dx$$ (ガウス積分)

3

(1) S_1, S_2 は原点$(0,0,0)$で接し

それぞれの中心を$(0,0,1), (0,0,-1)$とする

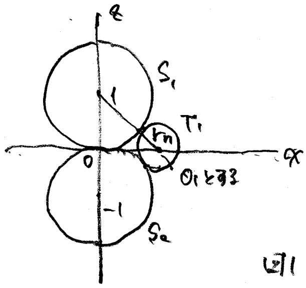


図1

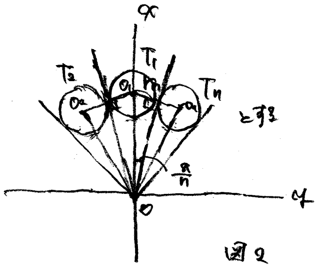


図2

図1より

$OO_1=\sqrt{(r_n+1)^2-1^2}=\sqrt{r_n^2+2r_n}$

図2より

$\sin\frac{\pi}{n}=\frac{r_n}{\sqrt{r_n^2+2r_n}}$

$=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2}{r_n}}}$

$1+\frac{2}{r_n}=\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{n}}$

$\frac{2}{r_n}=\frac{1}{\sin^2\frac{\pi}{n}}-1=\frac{1}{\tan^2\frac{\pi}{n}}$

∴ $r_n=2\tan^2\frac{\pi}{n}$ //

(2) パップスギュルダンの定理より

$V_n=2\pi OO_1\cdot\pi r_n^2$

$=2\pi^2\sqrt{r_n^2+2r_n}\,r_n^2$

また、

$W_n=\frac{4}{3}\pi r_n^3\cdot n=\frac{4}{3}n\pi r_n^3$

よって

$\lim_{n\to\infty}\frac{W_n}{V_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{3}n\pi r_n^3}{2\pi^2\sqrt{r_n^2+2r_n}\cdot r_n^2}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3\pi\sqrt{1+\frac{2}{r_n}}}$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{3\pi\cdot\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}$

$=\frac{2}{3}$ //

<point>

1. パップス・ギュルダンの定理

4

(1) $2x^2-x^4=a$ とすると

$x^4-2x^2+a=0$

$x^2=1\pm\sqrt{1-a}$

∴ $x=\pm\sqrt{1\pm\sqrt{1-a}}$

よってCとlの交点は

$(\pm\sqrt{1\pm\sqrt{1-a}}, a)$ (4つ)

(2) $2x^2-x^4=-x^2(x^2-2)$

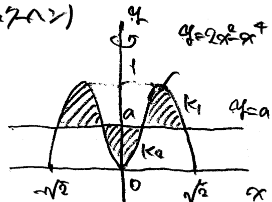
(バウムクーヘン)

$V_1=2\pi\int_{\sqrt{1-\sqrt{1-a}}=\alpha}^{\sqrt{1+\sqrt{1-a}}=\beta\ \text{とおく}}x(2x^2-x^4-a)$

$=2\pi\int_\alpha^\beta(2x^3-x^5-ax)dx$

$=2\pi\left[\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{6}x^6-\frac{a}{2}x^2\right]_\alpha^\beta$

$=\pi\{(\beta^4-\alpha^4)-\frac{1}{3}(\beta^6-\alpha^6)-a(\beta^2-\alpha^2)\}$



ここで

$\beta^2-\alpha^2=2\sqrt{1-a}$

$(1+\sqrt{1-a})(1-\sqrt{1-a})=1-(1-a)=a$

$\beta^4-\alpha^4=(\beta^2+\alpha^2)(\beta^2-\alpha^2)=4\sqrt{1-a}$

$\beta^6-\alpha^6=(\beta^2-\alpha^2)^3+3\beta^2\alpha^2(\beta^2-\alpha^2)$

$=(2\sqrt{1-a})^3+6a\sqrt{1-a}$

$=8(1-a)\sqrt{1-a}+6a\sqrt{1-a}$

$=2(4-a)\sqrt{1-a}$

より

$=\pi\{4\sqrt{1-a}-\frac{2(4-a)}{3}\sqrt{1-a}-2a\sqrt{1-a}\}$

$=\frac{4(1-a)}{3}\sqrt{1-a}\,\pi$

$V_2=2\pi\int_0^\alpha x(a-2x^2+x^4)dx$

$=2\pi\left[\frac{a}{2}x^2-\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{6}x^6\right]_0^\alpha$

$=2\pi(\frac{a}{2}\alpha^2-\frac{1}{2}\alpha^4+\frac{1}{6}\alpha^6)$

$=\{a-\frac{2}{3}-\frac{2(a-1)}{3}\sqrt{1-a}\}\pi$

$V_1=V_2$ となるとき

$\frac{4(1-a)}{3}\sqrt{1-a}=a-\frac{2}{3}-\frac{2(a-1)}{3}\sqrt{1-a}$

$4(1-a)\sqrt{1-a}=3a-2-2(a-1)\sqrt{1-a}$

$(-2a+2)\sqrt{1-a}=3a-2$

$4(1-a)^3=(3a-2)^2,\quad a\geqq\frac{2}{3}$

$4(1-3a+3a^2-a^3)=9a^2-12a+4$

$4a^3-3a^2=0$

$a^2(4a-3)=0 \qquad \therefore a=\frac{3}{4}$ //

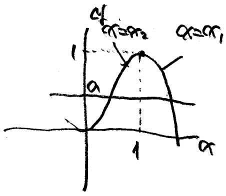
[別解]

ふつうに y軸回転で解く。

$y=2x^2-x^4$

$x^4-2x^2+y=0$

$\therefore x^2=1\pm\sqrt{1-y}$



$V_1=\int_a^1\pi x_1^2\,dy-\int_a^1\pi x_2^2\,dy$

$=\pi\int_a^1\{1+\sqrt{1-y}-(1-\sqrt{1-y})\}\,dy$

⋮

こちらの方が計算は楽

<point>

1. バウムクーヘン型積分

5

(1) $x^2-nx=mx$ として

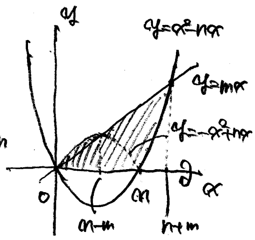
$x^2-(m+n)x=0$

$x\{x-(m+n)\}=0 \quad \therefore x=0,\ n+m$

$-x^2+nx=mx$ として

$x^2-(n-m)x=0$

$x\{x-(n-m)\}=0 \quad \therefore x=0,\ n-m$



$V_n=\int_0^{n-m}\pi y^2\,dx+\left(\frac{n-m}{n+m}\right)^3\cdot\frac{1}{3}\pi\{m(n+m)\}^2(n+m)$

$-\int_n^{n+m}\pi y^2\,dx$

$=\pi\int_0^{n-m}\{-x^2+nx\}^2\,dx+\frac{1}{3}\pi m^2(n-m)^3-\pi\int_n^{n+m}\underbrace{(x^2-nx)^2}_{x^4-2nx^3+n^2x^2}\,dx$

$=\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{n}{2}x^4+\frac{n^2}{3}x^3\right]_0^{n-m}-\pi\left[\frac{x^5}{5}-\frac{n}{2}x^4+\frac{n^2}{3}x^3\right]_n^{n+m}$

$+\frac{1}{3}\pi m^2(n-m)^3$

$=\left\{\frac{n^2+3nm+16m^2}{30}(n-m)^3-\frac{n^2-3nm+6m^2}{30}(n+m)^3+\frac{n^5}{30}\right\}\pi$

$=\frac{\pi}{30}\{(n^2+3nm+16m^2)(n-m)^3-(n^2-3nm+6m^2)(n+m)^3+n^5\}$

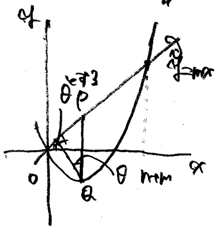
$=\frac{1}{30}(n^5+40n^2m^3+8m^5)\pi$ //

(2) $W_n=\int_0^{n+m}\pi PQ^2\cos\theta\,dx$

$=\frac{\pi}{\sqrt{m^2+1}}\int_0^{n+m}\{mx-(x^2-nx)\}^2\,dx$ ($-x^2+(n+m)x$)

$=\frac{\pi}{\sqrt{m^2+1}}\int_0^{n+m}x^2\{x-(n+m)\}^2\,dx$

$=\frac{\pi}{30\sqrt{m^2+1}}(n+m)^5$ //



$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}$

(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{W_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3m}{n}+\frac{16m^2}{n^2}\right)\left(1-\frac{m}{n}\right)^3-\left(1-\frac{3m}{n}+\frac{6m^2}{n^2}\right)\left(1+\frac{m}{n}\right)^3+1}{\frac{1}{\sqrt{m^2+1}}\left(1+\frac{m}{n}\right)^5}$

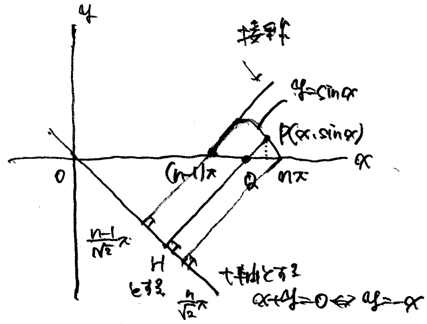
$=\sqrt{m^2+1}$ //

<point>

1. 斜軸回転、傘型積分

6

(1)



$PH=\frac{|x+\sin x|}{\sqrt{2}}=\frac{x+\sin x}{\sqrt{2}}$

$QH=\frac{x+\sin x}{\sqrt{2}}-\sqrt{2}\sin x=\frac{x-\sin x}{\sqrt{2}}$

求める面積 $S(x)$ は

$S(x)=\pi(PH^2-QH^2)$

$=\pi\left\{\frac{(x+\sin x)^2}{2}-\frac{(x-\sin x)^2}{2}\right\}$

$=2\pi x\sin x$ //

(2) $V_n=\int_{\frac{n-1}{\sqrt{2}}\pi}^{\frac{n}{\sqrt{2}}\pi}S(x)\,dt \qquad t=\frac{x-\sin x}{\sqrt{2}}$

$=\int_{\frac{n-1}{\sqrt{2}}\pi}^{\frac{n}{\sqrt{2}}\pi}2\pi x\sin x\,dt$

$\frac{dt}{dx}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\cos x)$

$t:\ \frac{n-1}{\sqrt{2}}\pi\to\frac{n}{\sqrt{2}}\pi$

$x:\ (n-1)\pi\to n\pi$

$V_n=2\pi\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}x\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\cos x)dx$

$=\sqrt{2}\pi\left(\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}x\sin x\,dx-\frac{1}{2}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}x\sin 2x\,dx\right)$

ここで

$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}x\sin x\,dx$ 　 $f\ x$, $f'\ 1$, $g\ -\cos x$, $g'\ \sin x$

$=\left[-x\cos x\right]_{(n-1)\pi}^{n\pi}+\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\cos x\,dx$

$=-n\pi\underbrace{\cos n\pi}_{-1}+(n-1)\pi\underbrace{\cos(n-1)\pi}_{1}+\left[\sin x\right]_{(n-1)\pi}^{n\pi}$

$=(2n-1)\pi$

$\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}x\sin 2x\,dx$ 　 $f\ x$, $f'\ 1$, $g\ -\frac{\cos 2x}{2}$, $g'\ \sin 2x$

$=\left[-x\cdot\frac{\cos 2x}{2}\right]_{(n-1)\pi}^{n\pi}+\frac{1}{2}\int_{(n-1)\pi}^{n\pi}\cos 2x\,dx$

$=\frac{1}{2}\{-n\pi+(n-1)\pi\}+\frac{1}{2}\left[\frac{\sin 2x}{2}\right]_{(n-1)\pi}^{n\pi}$

$=-\frac{\pi}{2}$

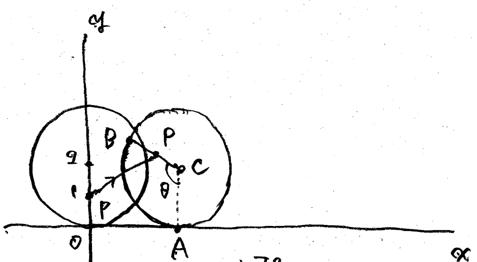
より

$V_n=\sqrt{2}\pi\left\{(2n-1)\pi+\frac{\pi}{4}\right\}$

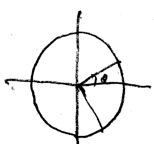
$=\frac{\sqrt{2}(8n-3)}{4}\pi^2$ //

$\boxed{7}$

1)



とする



$\vec{OP}=\vec{OC}+\vec{CP}$

$OA=\overset{\frown}{AB}$ より $OA=2\theta$

$\vec{OC}=\begin{pmatrix}2\theta\\2\end{pmatrix}$,

$\vec{CP}=\begin{pmatrix}\cos(-\theta-\frac{\pi}{2})\\\sin(-\theta-\frac{\pi}{2})\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin(-\theta)\\-\cos(-\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin\theta\\-\cos\theta\end{pmatrix}$

$P(x,y)$とすると

$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\theta\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-\sin\theta\\-\cos\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\theta-\sin\theta\\2-\cos\theta\end{pmatrix}$

$\therefore P(2\theta-\sin\theta,\ 2-\cos\theta)$ // （トロコイド）

2) $\frac{dx}{d\theta}=2-\cos\theta$, $\frac{dy}{d\theta}=\sin\theta$

$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\sin\theta}{2-\cos\theta}$

Pにおける法線の方程式は

$y-(2-\cos\theta)=\frac{\cos\theta-2}{\sin\theta}(x-(2\theta-\sin\theta))$ $(\theta\neq\pi)$

$\theta=\pi$のときは $x=2\pi$

これとx軸との交点は $\theta\neq\pi$のとき $y=0$として

$\sin\theta=x-2\theta+\sin\theta$

$\therefore x=2\theta$

これは $\theta=\pi$のときも成り立つ

よって

$PQ^2=\sin^2\theta+(2-\cos\theta)^2$

$=\sin^2\theta+4-4\cos\theta+\cos^2\theta$

$=5-4\cos\theta$

PQ^2が最大のとき PQも最大であるから

$\theta=\pi$のとき すなわち $P(2\pi,3)$のとき最大である //

3) 求める体積Vは

$V=\int_0^{4\pi}\pi y^2dx$

$x=2\theta-\sin\theta$, $\frac{dx}{d\theta}=2-\cos\theta$ 　 $x:0\to4\pi$, $\theta:0\to2\pi$

$V=\pi\int_0^{2\pi}(2-\cos\theta)^2(2-\cos\theta)d\theta$

$=\pi\int_0^{2\pi}(8-12\cos\theta+6\cos^2\theta-\cos^3\theta)d\theta$

ここで

$\int_0^{2\pi}\cos\theta\,d\theta=\left[\sin\theta\right]_0^{2\pi}=0$

$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos2\theta)d\theta$

$=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{\sin2\theta}{2}\right]_0^{2\pi}=\pi$

$\int_0^{2\pi}\cos^3\theta\,d\theta=\int_0^{2\pi}\cos\theta(1-\sin^2\theta)d\theta$

$=\left[-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{2\pi}=0$

より

$V=\pi(16\pi+6\pi)=22\pi^2$ //

$\boxed{8}$

(1) $\begin{cases} x = e^{-t}\cos t \\ y = e^{-t}\sin t \end{cases} \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$

$\frac{dx}{dt} = -e^{-t}\cos t - e^{-t}\sin t$

$= -\sqrt{2}e^{-t}\sin\left(t + \frac{\pi}{4}\right)$

$\frac{dy}{dt} = -e^{-t}\sin t + e^{-t}\cos t$

$= -\sqrt{2}e^{-t}\sin\left(t - \frac{\pi}{4}\right)$

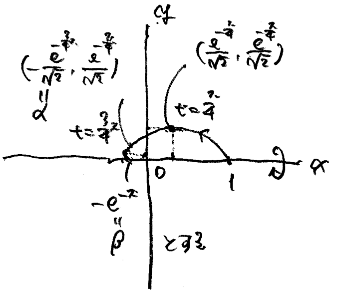
$\frac{dx}{dt} = 0$ とすると $t = \frac{3\pi}{4}$

$\frac{dy}{dt} = 0$ 〃 $t = \frac{\pi}{4}$

t	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
$\frac{dx}{dt}$		$-$	$(-)$	$-$	0	$+$	
x	1	$\leftarrow$	$\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$\leftarrow$	$-\frac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$\rightarrow$	$-e^{-\pi}$
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	$(-)$	$-$	
y	0	$\uparrow$	$\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$\downarrow$	$\frac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$	$\downarrow$	0

xの最小値は $-\frac{e^{-\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$

yの 〃 は $\frac{e^{-\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}}$



〃

(2) $\int_0^{\pi} \{r(t)\}^2 r'(t) \sin^2 t \cos t \, dt$

$f: \sin^2 t \cos t$ $\qquad g': \frac{1}{3}\{r(t)\}^3$

$f': 2\sin t\cos^2 t - \sin^3 t$ $\qquad g: \{r(t)\}^2 r'(t)$

($\cos^2 t = 1 - \sin^2 t$)

$= 2\sin t - 3\sin^3 t$

$= \left[\frac{1}{3}\{r(t)\}^3 \sin^2 t \cos t\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{1}{3}\{r(t)\}^3 (2\sin t - 3\sin^3 t) dt$

$= \int_0^{\pi} \{r(t)\}^3 \left(\sin^3 t - \frac{2}{3}\sin t\right) dt$ 口

(3) $V = \int_{\alpha}^{1} \pi y^2 dx - \int_{\alpha}^{\beta} \pi y^2 dx$

$x = e^{-t}\cos t$ より

$\frac{dx}{dt} = -e^{-t}(\sin t + \cos t)$ $\qquad x: \alpha \to 1 \quad \alpha \to \beta$; $t: \frac{3}{4}\pi \to 0 \quad \frac{3}{4}\pi \to \pi$

$= \int_{\frac{3}{4}\pi}^{0} \pi (e^{-t}\sin t)^2 \{-e^{-t}(\sin t + \cos t)\} dt$

$- \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}$ 〃

$= \pi \int_0^{\pi} e^{-2t} \cdot e^{-t} \sin^2 t (\sin t + \cos t) dt$

$= \pi \left\{ \int_0^{\pi} e^{-3t} \sin^3 t \, dt - \int_0^{\pi} (e^{-t})^2 (-e^{-t}) \sin^2 t \cos t \, dt \right\}$

$= \pi \left\{ \int_0^{\pi} e^{-3t} \sin^3 t \, dt - \int_0^{\pi} (e^{-t})^3 \left(\sin^3 t - \frac{2}{3}\sin t\right) dt \right\}$

$= \frac{2\pi}{3} \int_0^{\pi} e^{-3t} \sin t \, dt$ 口