高3数学　発展問題演習　演習　14. 積分法

$\boxed{1}$［2003 東京大］

a，b，c を実数とし，$a \neq 0$ とする．2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ が次の条件 (A)，(B) を満たすとする．

(A)　$f(-1)=-1$，$f(1)=1$，$f'(1) \leqq 6$

(B)　$-1 \leqq x \leqq 1$ を満たすすべての x に対し，$f(x) \leqq 3x^2-1$

このとき，積分 $I=\int_{-1}^{1}\{f'(x)\}^2dx$ の値のとりうる範囲を求めよ．

$\boxed{2}$［Ⅰ. 青山学院大 Ⅱ. 愛媛大 Ⅲ. 京都大 Ⅳ. 東北大 Ⅴ. 学習院大 Ⅵ. 一橋大］

Ⅰ．関数 $f_1(x)$，$f_2(x)$，……，$f_n(x)$ は，$f_n(x)=2x^2+\int_0^1 f_{n-1}(t)\,dt$ を満たすものとする (ただし，$n \geqq 2$)．$f_1(x)=2x^2+1$ のとき，$f_2(x)$ を求めよ．

また，$f_n(x)$ を n を用いて表せ．

Ⅱ．関係式 $f_1(x)=-x+2,\ f_{n+1}(x)=\dfrac{2}{3}\int_{-2}^{1}(x+t)f_n(t)dt\ (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ により関数 $f_n(x)$ を定める．

(1) $f_2(x)$ を求めよ．

(2) 各 n について $f_n(x)=a_nx+b_n$ により定数 a_n, b_n を定める．

(i) a_{n+1}, b_{n+1} を a_n, b_n を用いて表せ．

(ii) 各 n について $c_n=a_n-b_n$ とするとき，数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ．

(iii) $f_n(x)$ を求めよ．

Ⅲ．関数 $f_n(x)\ (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ は

$$f_1(x)=4x^2+1\ ,$$

$$f_n(x)=\int_0^1\left(3x^2tf_{n-1}'(t)+3f_{n-1}(t)\right)dt\ (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

で帰納的に定義されている．この $f_n(x)$ を求めよ．

Ⅳ．2 次関数 $f_n(x)\ (n=1, 2, \cdots\cdots)$ を次のように定義する．

$$f_1(x)=3x^2,\ f_2(x)=3x^2+4x$$

$$f_n(x)=3x^2+4x\int_0^1 f_{n-1}(t)dt-\int_0^1 f_{n-2}(t)dt\ (n \geqq 3)$$

$a_1=0,\ a_n=\int_0^1 f_{n-1}(t)dt\ (n \geqq 2)$ とおくとき，$f_n(x)$ を求めよ．

Ⅴ．次の関係式をみたす多項式 $f_n(x)$ を求めよ．

$$f_1(x)=x+1,\ xf_{n+1}(x)=x^2+x+\int_0^x f_n(t)dt\ (n=1,2,\cdots\cdots)$$

Ⅵ．関数 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots\cdots$ を次のように定める．

$$f_1(x)=x+2$$

$$f_{n+1}(x)=3\int_0^x f_n(t)dt-(x-1)f_n(x)\ (n=1,2,3,\cdots\cdots)$$

(1) $f_n(x)=a_nx^2+b_nx+2$ と表せることを示せ．

(2) a_n, b_n を n で表せ．

$\boxed{3}$ ［Ⅰ．2016 九州大　Ⅱ．2023 琉球大］

Ⅰ．座標平面において，x 軸上に 3 点 $(0,\ 0)$，$(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ $(0<\alpha<\beta)$ があり，曲線 C：$y=x^3+ax^2+bx$ が x 軸とこの 3 点で交わっているものとする。ただし，a，b は実数である。

(1)　曲線 C と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とする。S を α と β の式で表せ。

(2)　β の値を固定して，$0<\alpha<\beta$ の範囲で α を動かすとき，S を最小とする α を β の式で表せ。

Ⅱ．$f(x)=x^3+x^2$ とする。

(1)　$f(x)$ の増減，極値を調べ，$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2)　$0<a<1$ とする。曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=a^2(x+1)$ によって囲まれた 2 つの部分の面積の和 $S(a)$ を求めよ。

(3)　$0<a<1$ の範囲で $S(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

$\boxed{4}$ [Ⅰ. 2016 早稲田大　Ⅱ. 2006 一橋大]

Ⅰ. 関数 $f(x)$ を $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}(1+|t|)(1+|t-1|)dt$ と定義する。

(1)　$x\leqq -1$ のとき，$f(x)=$ $^{ア}\boxed{}x^2+$ $^{イ}\boxed{}x+\dfrac{^{ウ}\boxed{}}{_{エ}\boxed{}}$ である。

(2)　x が実数全体を動くとき，関数 $f(x)$ は，$x=$ $^{オ}\boxed{}$ のとき最小となり，その値は

$\dfrac{^{カ}\boxed{}}{_{キ}\boxed{}}$ である。

Ⅱ. a を定数とする。関数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=1-x,\ \ g(x)=|x|,\ \ h(x)=\int_0^x\{f(t)-g(t-a)\}dt$$

(1)　$a=\dfrac{1}{2}$ のとき，$x\geqq 0$ における関数 $y=h(x)$ のグラフをかけ。

(2)　$x\geqq 0$ における $h(x)$ の最大値を a で表せ。

$\boxed{5}$ [岐阜大]

2つの曲線 $y=x^3-a^2x$ と $y=x^2-bx$ に囲まれた2つの図形の面積が等しくなることがあるか．なければ，ないことを証明せよ．あれば，a と b が満たす関係式を求め，そのグラフを ab 平面上に図示せよ．

$\boxed{6}$ [Ⅰ.2024 岡山大 Ⅱ.1999 東京理科大 Ⅲ.2024 一橋大 Ⅳ.2010 大阪府立大]

Ⅰ. 座標平面において，放物線 $y=-x^2+1$ を C，原点を中心とする半径 r の円を D とする。ただし，$r>0$ とする。放物線 C と円 D は共有点をもたないとする。

(1)　r の値の範囲を求めよ。

(2)　$0<\theta<\pi$ のとき，円 D 上の点 $(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$ における D の接線を ℓ とする。接線 ℓ と放物線 C で囲まれた図形の面積 S を求めよ。ただし，S は r と $\sin\theta$ を用いて表すこと。

Ⅱ．放物線 C：$y=x^2+2$ 上に異なる2点 $\mathrm{P}(a,\ a^2+2)$，$\mathrm{Q}(b,\ b^2+2)$ $(a<b)$ をとる．点Pにおける C の接線と，点Qにおける C の接線との交点をRとし，2点P，Qを通る直線と放物線 C で囲まれた図形の面積を S とする．

(1)　点Rの座標を求めよ．

(2)　2点P，Qが S を $\dfrac{1}{6}$ に保って動くとき，点Rはどのような方程式で表される曲線上を動くか．

(3)　点Rが原点を中心とする半径1の円周上を動くとき，S を最大，最小にするRの座標を求めよ．

Ⅲ．a，b を実数とする。曲線 C：$y=x^2$ と曲線 C'：$y=-x^2+ax+b$ はある点を共有しており，その点におけるそれぞれの接線は直交している。C と C' で囲まれた部分の面積の最小値を求めよ。

Ⅳ．k を正の実数とし，xy 平面上の2曲線 C_1：$y=-x^3+kx$，C_2：$x^2+y^2=k$ を考える。

(1)　C_1 と C_2 の共有点の個数を求めよ。

(2)　C_1 と C_2 が4つの共有点をもつとする。$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ の範囲において，C_1 と C_2 で囲まれた2つの部分の面積をそれぞれ求めよ。

$\boxed{7}$ [2013 岡山大]

C を xy 平面上の放物線 $y=x^2$ とする。不等式 $y<x^2$ で表される領域の点Pから C に引いた2つの接線に対して，それぞれの接点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とする。また，2つの接線と C で囲まれた部分の面積を S とする。このとき，次の問いに答えよ。ただし，等式 $\displaystyle\int_p^q (x-p)^2dx=\frac{(q-p)^3}{3}$ を用いてもよい。

(1)　点Pの座標 $(a,\ b)$ を α，β を用いて表せ。

(2)　$S=\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{12}$ を示せ。

(3)　点Pが曲線 $y=x^3-1$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ 上を動くとき，$(\beta-\alpha)^2$ の値の範囲を調べよ。更に，S の最大値および最小値を与える点Pの座標を求めよ。

$\boxed{8}$［Ⅰ．一橋大　Ⅱ．東京大　Ⅲ．一橋大］

Ⅰ．2つの曲線

$$\begin{cases} y=x^3+x^2+ax \cdots\cdots ① \\ x=y^3+y^2+ay \cdots\cdots ② \end{cases}$$

は原点で同じ直線に接している．

(1) a の値を求めよ．

(2) 曲線 ① と ② で囲まれる部分の面積 S を求めよ．

Ⅱ．xy 平面上で，曲線 C : $y=x^3+ax^2+bx+c$ 上の点 P における接線 l が P と異なる点 Q で C と交わるとする． l と C で囲まれた部分の面積と，Q における接線 m と C で囲まれた部分の面積の比を求め，これが一定であることを示せ．

Ⅲ．曲線 $y=x^3$ を C とし， C を両座標軸の正の方向にともに $a\ (a>0)$ だけ平行移動した曲線を C' とする．

(1) C と C' が異なる 2 点で交わるような a の範囲を求めよ．

(2) a が (1) の範囲にあるとき， C と C' で囲まれた部分の面積 S を a で表せ．

(3) (2) の面積 S を最大にする a の値および S の最大値を求めよ．

$\boxed{9}$［Ⅰ．名古屋市立大　Ⅱ．1996 大阪大］

Ⅰ．$f(x)=x^4-2x^2$ とするとき，

(1) 方程式 $f(x)=k$ が異なる 4 つの実数解をもつような k の範囲を求めよ．

(2) (1) の条件がみたされているとき，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=k$ で囲まれた 3 つの部分の面積を左から順に S_1, S_2, S_3 とする． $S_1+S_3=S_2$ となる k の値を求めよ．

Ⅱ．曲線 $y=x(x-a)(x-b)(x-c)\ (0<a<b<c)$ と x 軸との交点を左から順に O, A, B, C とする．線分 OA, AB, BC とこの曲線によって囲まれる部分をそれぞれ S, T, U とする．

(1)　S と T の面積が等しくなるための必要十分条件は $3b^2-5(a+c)b+10ac=0$ であることを示せ．

(2)　上の曲線を y 軸に関して対称移動し，次に x 軸の正の方向に c だけ平行移動してできる曲線の式を求めよ．

(3)　S と T と U の面積がすべて等しいとき，b, c を a を用いて表せ．

$\boxed{10}$ [2013 立教大]

関数 $F(x)$ を次のように定める。

$$F(x)=\begin{cases} x^2 & (x\leqq 1) \\ -x^2+2x & (x>1) \end{cases}$$

実数 k が $0<k<1$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1)　直線 $y=kx$ と曲線 $y=F(x)$ の交点のうち，原点とは異なるものをすべて求めよ。

(2)　直線 $y=kx$ と曲線 $y=F(x)$ で囲まれた 2 つの部分のうち，直線 $y=kx$ の下側にある部分の面積 S_1 を k を用いて表せ。

(3)　直線 $y=kx$ と曲線 $y=F(x)$ で囲まれた 2 つの部分のうち，直線 $y=kx$ の上側にある部分の面積 S_2 を k を用いて表せ。

(4)　(2) で求めた S_1 と (3) で求めた S_2 の和 $S=S_1+S_2$ が最小となるときの k の値を求めよ。