

2.5 定積分と不等式

(1) 定積分と不等式

関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で連続で、常に $f(x) \geq 0$ ならば、 $\int_a^b f(x)dx$ は、この関数のグラフと x 軸、および 2 直線 $x=a, x=b$ で囲まれた部分の面積 S に等しい。ここで、 $[a, b]$ において常に $f(x)=0$ ならば $S=0$ であり、 $f(x)>0$ となる x が存在するならば $S>0$ である。

よって、次のことが成り立つ。

$$\text{区間 } [a, b] \text{ で } f(x) \geq 0 \text{ ならば, } \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

等号は常に $f(x)=0$ であるときに限って成り立つ。

このことから、連続な関数について次のことが導かれる。

定積分と不等式

$$\text{区間 } [a, b] \text{ で } f(x) \geq g(x) \text{ ならば, } \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

等号は常に $f(x)=g(x)$ であるときに限って成り立つ

証明

$f(x) \geq g(x)$ であるから、 $f(x) - g(x) \geq 0$ より

$$\int_a^b \{f(x) - g(x)\}dx \geq 0$$

$$\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \geq 0$$

$$\therefore \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

等号は常に $f(x) - g(x) = 0$ ，すなわち $f(x) = g(x)$ であるときに限って成り立つ

例1

(1) 定積分 $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$ の値を求めよ。

(2) 不等式 $\frac{\pi}{4} < \int_0^1 \frac{1}{1+x^4} dx < 1$ が成り立つことを示せ。

解説

(1) $x = \tan \theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

よって

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

(2) $0 \leq x \leq 1$ のとき, $1+x^4 \leq 1+x^2$ から, $\frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^4} \leq 1$ より

どちらの不等号も, 等号は常には成り立たないから

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4} < \int_0^1 dx$$

$$\therefore \frac{\pi}{4} < \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4} < 1$$

例2

(1) すべての実数 x に対して, 次の不等式を証明せよ。

$$(ア) \quad 1+x \leq e^x \qquad (イ) \quad 1-x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$$

(2) 次の不等式を証明せよ。

$$\frac{2}{3} < \int_0^1 e^{-x^2} dx < \frac{\pi}{4}$$

解説

(1) (ア) $f(x) = e^x - (x+1)$ とおくと

$$f'(x) = e^x - 1$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると, } x=0$$

$f(x)$ の増減表は右図

$x=0$ のとき極小 極小値 0

よって, すべての実数 x に対して, $f(x) \geq 0$

したがって, $1+x \leq e^x$

(イ) (ア)より, すべての実数 t に対して $1+t \leq e^t$ が成り立つ

$t=x^2$ とおくと,

$$0 < 1+x^2 \leq e^{x^2} \quad \therefore e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$$

$t=-x^2$ とおくと, $1-x^2 \leq e^{-x^2}$

x	...	0	...
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	↘	0	↗

$$\text{よって, } 1-x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$$

$$(2) (1) \text{より, } 1-x^2 \leq e^{-x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}$$

等号は常には成り立たないから

$$\int_0^1 (1-x^2) dx < \int_0^1 e^{-x^2} dx < \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

ここで

$$\int_0^1 (1-x^2) dx = \left[x - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx \text{ について, } x = \tan \theta \text{ とおくと}$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

x	$0 \rightarrow 1$
θ	$0 \rightarrow \frac{\pi}{4}$

よって

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \left[\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}$$

以上より

$$\frac{2}{3} < \int_0^1 e^{-x^2} dx < \frac{\pi}{4}$$

(2) 面積評価

例3

(1) 2以上の自然数 n に対して

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \leq \log_e n \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1}$$

が成り立つことを示せ。ただし, e は自然対数の底を表す。

(2) e の近似値を使わず, $\log_e 4$ の整数部分が1であることを示せ。

(解説)

(1) 自然数 k と実数 x に対して, $k \leq x \leq k+1$ のとき

$$\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k} \text{ より}$$

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx$$

$$\therefore \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$$

各辺を $k=1, 2, \dots, n-1$ について足し合わせると

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \int_1^n \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

$$\int_1^n \frac{1}{x} dx = [\log x]_1^n = \log n \text{ より}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq \log n \leq 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}$$

別解 面積評価

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ は内側の短冊状の長方形

の面積の総和を表し、

$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}$ は外側の短冊状の長方形

形の面積の総和を表すから、

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < \int_1^n \frac{1}{x} dx$$

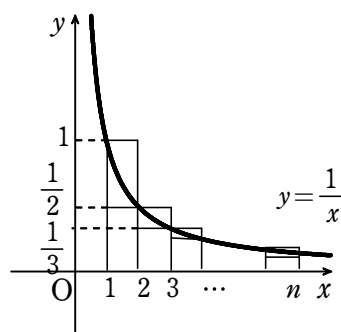
$$< 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1}$$

としてもよい

(2)(1)において $n=4$ とすると

$$\frac{13}{12} \leq \log 4 \leq \frac{11}{6}$$

よって、 $\log 4$ の整数部分は 1



例4

(1) k を 2 以上の自然数とすると、

$$\int_{k-1}^k \log x dx < \log k < \int_k^{k+1} \log x dx$$

であることを示せ。

(2) すべての自然数 n について、

$$n^n e^{-n} < n! < (n+1)^{n+1} e^{-n}$$

であることを示せ。

解説

(1) $y = \log x$ は $x > 0$ において単調増加であるから,
 $2 \leq k < x < k+1$ のとき, $\log k < \log x < \log(k+1)$ より

$$\log k < \int_k^{k+1} \log x dx < \log(k+1)$$

この不等式は, k を $k-1$ に置き換えても成り立つから

$$\int_{k-1}^k \log x dx < \log k$$

以上より

$$\int_{k-1}^k \log x dx < \log k < \int_k^{k+1} \log x dx$$

別解 面積評価

$\int_{k-1}^k \log x dx$ は $k-1 \leq x \leq k$ において $y = \log x$ と x 軸で囲まれる部分の

面積, $\log k$ は縦が $\log k$, 横が 1 の長方形の面積, $\int_k^{k+1} \log x dx$ は $k \leq x \leq k+1$ において $y = \log x$ と x 軸で囲まれる部分の面積を表すことを考えれば明らかである。

(2) $n^n e^{-n} < n! < (n+1)^{n+1} e^{-n} \dots$ ①

$n=1$ のとき, $\frac{1}{e} < 1 < \frac{4}{e}$ より成り立つ

$n \geq 2$ のとき, (1)において, $k=2, 3, \dots, n$ として辺々を加えて

$$\begin{aligned} & \int_1^2 \log x dx + \int_2^3 \log x dx + \dots + \int_{n-1}^n \log x dx \\ & < \log 2 + \log 3 + \dots + \log n \\ & < \int_2^3 \log x dx + \int_3^4 \log x dx + \dots + \int_n^{n+1} \log x dx \\ & \therefore \int_1^n \log x dx < \log(2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n) < \int_2^{n+1} \log x dx \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \int_1^n \log x dx &= \left[x \log x - x \right]_1^n = n \log n - n + 1 \\ \int_2^{n+1} \log x dx &= \left[x \log x - x \right]_2^{n+1} = (n+1) \log(n+1) - (n+1) - 2 \log 2 + 2 \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} n \log n - n + 1 &< \log(n!) < (n+1) \log(n+1) - n + 1 - \log 4 \\ n \log n - n &< \log(n!) < (n+1) \log(n+1) - n \end{aligned}$$

$$\log n^n e^{-n} < \log(n!) < \log(n+1)^{n+1} e^{-n}$$

$$n^n e^{-n} < n! < (n+1)^{n+1} e^{-n}$$

よって、すべての自然数 n について成り立つ

例5

$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ とし、曲線 $y=f(x)$ ($x>0$) の変曲点を $(a, f(a))$ とする。

(1) a の値を求めよ。

(2) 定積分 $\int_a^1 f(x) dx$ の値を求めよ。

(3) 4点 $(a, f(a))$, $(a, 0)$, $(1, 0)$, $(1, f(1))$ を頂点とする台形の面積と定積分 $\int_a^1 f(x) dx$ を比較することにより、円周率 π は 3.17 より小さいことを証明せよ。必要なら、 $\sqrt{3} = 1.732\cdots$ を用いてよい。

解説

$$(1) f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-2(1+x^2)^2 + 2x \cdot 2(1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} = \frac{-2(1+x^2) + 8x^2}{(1+x^2)^3} = \frac{2(3x^2-1)}{(1+x^2)^3}$$

$$f''(x)=0 \text{ とすると, } x = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ (} x>0 \text{)}$$

この前後で $f''(x)$ の符号変化を起こすので

$$a = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(2) $x = \tan \theta$ とおくと

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

よって

$$\int_a^1 f(x) dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2 \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} d\theta = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} d\theta = \left[\theta \right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{12}$$

x	$\frac{1}{\sqrt{3}} \rightarrow 1$
θ	$\frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{\pi}{4}$

(3) $\frac{1}{\sqrt{3}} < x < 1$ のとき $f''(x) > 0$ より

$y=f(x)$ は下に凸

よって

$$(\text{台形の面積}) > \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^1 f(x) dx = \frac{\pi}{12}$$

ここで

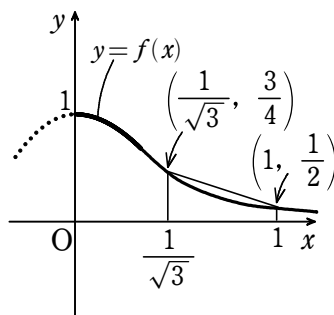
$$(\text{台形の面積}) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \right) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} = \frac{5(3-\sqrt{3})}{24}$$

より

$$\frac{5(3-\sqrt{3})}{24} > \frac{\pi}{12}$$

$$\therefore \pi < \frac{5(3-\sqrt{3})}{2} < \frac{5(3-1.732)}{2} = \frac{5 \times 1.268}{2} = 5 \times 0.634 = 3.17$$

[注] 台形による面積評価である。長方形による評価よりも精度は高い。



例6

k は正の整数とする。

(1) 曲線 $y = \frac{1}{x}$ ($x > 0$) は、下に凸であることを示せ。

(2) 定積分 $\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{1}{x} dx$ を求めよ。

(3) 2 直線 $x = k - \frac{1}{2}$, $x = k + \frac{1}{2}$ と曲線 $y = \frac{1}{x}$ 上の点 $\left(k, \frac{1}{k}\right)$ における接線、および x 軸によって囲まれた台形の面積を求めよ。

(4) 次の不等式を証明せよ。

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < \log(2n+1)$$

(解説)

(1) $f(x) = \frac{1}{x}$ とおくと, $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, $f''(x) = \frac{2}{x^3}$

$x > 0$ のとき $f''(x) > 0$ より,

$y = f(x)$ ($x > 0$) は下に凸である

$$(2) \int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \frac{1}{x} dx = \left[\log x \right]_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} = \log \left(k + \frac{1}{2} \right) - \log \left(k - \frac{1}{2} \right) = \log \frac{2k+1}{2k-1}$$

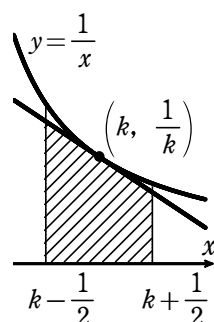
(3) $y=f(x)$ の $x=k$ における接線の方程式は

$$y-f(k)=f'(k)(x-k)$$

$$\therefore y = -\frac{1}{k^2}x + \frac{2}{k} \dots \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \text{で, } x=k-\frac{1}{2} \text{ のとき, } y = \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{k}$$

$$\textcircled{1} \text{で, } x=k+\frac{1}{2} \text{ のとき, } y = -\frac{1}{2k^2} + \frac{1}{k}$$



よって、求める台形の面積は

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2k^2} + \frac{1}{k} - \frac{1}{2k^2} + \frac{1}{k} \right) \cdot 1 = \frac{1}{k}$$

(4) (2), (3) と、面積の大小関係より

$$\frac{1}{k} < \log \frac{2k+1}{2k-1}$$

この不等式において、 $k=1, 2, 3, \dots, n$ として辺々を加えると

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} < \log \left(\frac{3}{1} \cdot \frac{5}{3} \cdot \frac{7}{5} \cdot \dots \cdot \frac{2n-1}{2n-3} \cdot \frac{2n+1}{2n-1} \right) = \log(2n+1)$$

注 台形による面積評価である。曲線が下に凸で、下からの面積評価では接線を利用する。

例7

n を 2 以上の自然数とする。次の問いに答えよ。

(1) 曲線 $y=\sqrt{x}$ ($x>0$) は上に凸であることを示せ。

(2) 次の不等式を示せ。

$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}{2} < \frac{2}{3} \left(n^{\frac{3}{2}} - 1 \right)$$

(3) 次の不等式を示せ。

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k} > \frac{2}{3} \left\{ \left(n - \frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right\}$$

(4) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n}} \right) - \frac{2}{3}n \right\}$ を求めよ。

解説

(1) $f(x)=\sqrt{x}$ とおくと

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}, f''(x)=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}$$

$x>0$ のとき $f''(x)<0$ より

$y=\sqrt{x}$ ($x>0$) は上に凸である

(2) 点 $(k, 0)$, $(k+1, 0)$, $(k, \sqrt{k})$,

$(k+1, \sqrt{k+1})$ を頂点とする台形の面積を S_1 とすると

$$S_1=\frac{1}{2} \cdot 1(\sqrt{k}+\sqrt{k+1})$$

曲線 $y=\sqrt{x}$, 直線 $x=k$, $x=k+1$ および x 軸で囲まれた部分の面積を S_2 とすると

$$S_2=\int_k^{k+1} \sqrt{x} dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_k^{k+1}=\frac{2}{3}\left\{(k+1)^{\frac{3}{2}}-k^{\frac{3}{2}}\right\}$$

曲線 $y=\sqrt{x}$ は上に凸であるから $S_1<S_2$ より

$$\frac{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}{2}<\frac{2}{3}\left\{(k+1)^{\frac{3}{2}}-k^{\frac{3}{2}}\right\}$$

$$\therefore \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}{2}<\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{3}\left\{(k+1)^{\frac{3}{2}}-k^{\frac{3}{2}}\right\}=\frac{2}{3}\left(n^{\frac{3}{2}}-1\right)$$

(3) 右図のように A, B, C, D, E, F をとる

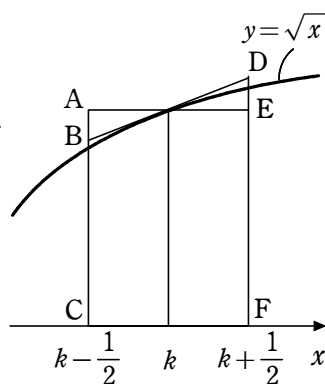
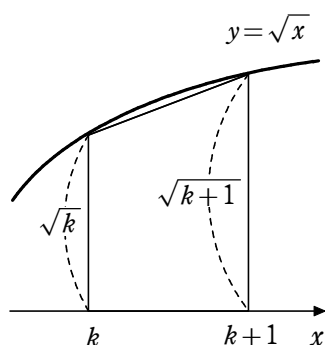
ここで, 点 B, D は $y=\sqrt{x}$ 上の点 $(k, \sqrt{k})$ における接線と, x 軸に垂直な線分 AC, EF およびその延長との交点である

右図より

$$(\text{長方形ACFE})=(\text{台形BCFD})>\int_{k-\frac{1}{2}}^{k+\frac{1}{2}} \sqrt{x} dx$$

$$1 \cdot \sqrt{k}>\frac{2}{3}\left\{\left(k+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(k-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k}>\sum_{k=1}^{n-1} \frac{2}{3}\left\{\left(k+\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(k-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}=\frac{2}{3}\left\{\left(n-\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}$$



$$\begin{aligned}
(4) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{k} + \sqrt{k+1}}{2} &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{k}}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\sqrt{k}}{2} + \frac{\sqrt{n}}{2} - \frac{1}{2} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k} + \frac{\sqrt{n}}{2} - \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$$(2) \text{ から, } \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{k} + \frac{\sqrt{n}}{2} - \frac{1}{2} < \frac{2}{3} (n^{\frac{3}{2}} - 1) \text{ より}$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n}} - \frac{2}{3}n < -\frac{1}{2} - \frac{1}{6\sqrt{n}}$$

$$(3) \text{ から, } \sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n}} > \frac{2}{3} \left\{ \left(n - \frac{1}{2} \right) \sqrt{1 - \frac{1}{2n}} - \frac{1}{2\sqrt{2n}} \right\} \text{ より}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n}} - \frac{2}{3}n &> \frac{2}{3} \left\{ \left(n - \frac{1}{2} \right) \sqrt{1 - \frac{1}{2n}} - \frac{1}{2\sqrt{2n}} - n \right\} \\
&= \frac{2}{3} \left\{ n \left(\sqrt{1 - \frac{1}{2n}} - 1 \right) - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{2n}} - \frac{1}{2\sqrt{2n}} \right\} \\
&= \frac{2}{3} \left\{ \frac{1}{-2 \left(\sqrt{1 - \frac{1}{2n}} + 1 \right)} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{2n}} - \frac{1}{2\sqrt{2n}} \right\}
\end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{6\sqrt{n}} \right) = -\frac{1}{2},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3} \left\{ \frac{1}{-2 \left(\sqrt{1 - \frac{1}{2n}} + 1 \right)} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{2n}} - \frac{1}{2\sqrt{2n}} \right\} = -\frac{1}{2}$$

であるから, はさみうちの原理より

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \left(\sum_{k=1}^{n-1} \sqrt{\frac{k}{n}} \right) - \frac{2}{3}n \right\} = -\frac{1}{2}$$

(3) 積分のコーシー・シュワルツの不等式

例8

(1) 実数 a, b は, $a < b$ をみたし, 関数 $f(x), g(x)$ は連続とする. すべての実数 t に対して, $\int_a^b \{tf(x) + g(x)\}^2 dx \geq 0$ であることを用いて, 次の不等式が成り立つことを証明せよ. 等号が成立する必要十分条件も述べて, それも証明せよ.

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b \{f(x)\}^2 dx \right) \left(\int_a^b \{g(x)\}^2 dx \right)$$

(2) 次の不等式が成り立つことを示せ.

$$\frac{(e-1)^2}{e} < \int_1^e \frac{1}{1+\log x} dx$$

解説

(1) (i) $f(x)=0$ のとき, 等号成立

(ii) $f(x) \neq 0$ のとき

$$\int_a^b \{tf(x) + g(x)\}^2 dx \cdots \textcircled{1}$$

$$= \int_a^b \{ \{f(x)\}^2 t^2 + 2f(x)g(x)t + \{g(x)\}^2 \} dx$$

$$= \left(\int_a^b \{f(x)\}^2 dx \right) t^2 + 2 \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right) t + \int_a^b \{g(x)\}^2 dx \geq 0$$

これが任意の t で成り立つとき,

判別式を D とすると, $D \leq 0$ より

$$D/4 = \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 - \left(\int_a^b \{f(x)\}^2 dx \right) \left(\int_a^b \{g(x)\}^2 dx \right) \leq 0$$

$$\therefore \left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b \{f(x)\}^2 dx \right) \left(\int_a^b \{g(x)\}^2 dx \right)$$

等号成立は $D/4=0$, すなわち, $\textcircled{1}=0$ となる t が存在するときで, このときの t を $t=t_0$ とすると

$$\int_a^b \{t_0 f(x) + g(x)\}^2 dx = 0$$

$$t_0 f(x) + g(x) = 0$$

$$\therefore g(x) = -t_0 f(x) \quad (t_0=0 \text{ のときは } g(x)=0)$$

(2) (1)において

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+\log x}}, g(x) = \sqrt{1+\log x}$$

とすると, $g(x) = -tf(x)$ となることはないので

$$\left(\int_1^e 1 dx\right)^2 < \int_1^e \frac{1}{1+\log x} dx \cdot \int_1^e (1+\log x) dx$$

$$\therefore \frac{(e-1)^2}{e} < \int_1^e \frac{1}{1+\log x} dx$$

(4) 積分の平均値の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で,
開区間 (a, b) で微分可能とする。

いま, $[a, b]$ で $f(x) \geq 0$ とすると,

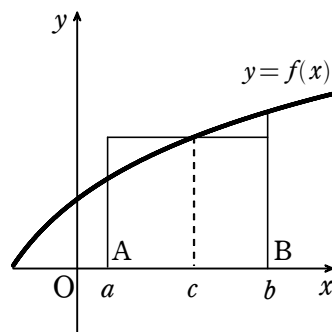
$\int_a^b f(x) dx$ は右図の $a \leq x \leq b$ において,

$y = f(x)$ と x 軸とで囲まれる部分の面積
を表す。

このとき, 図のように, この面積と等しい

AB を底辺とし, 高さを $f(c)$ ($a < c < b$) とする長方形が存在する。

一般に, 次の積分の平均値の定理が成り立つ。



積分の平均値の定理

関数 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続で, 開区間 (a, b) で微分可能ならば

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = f(c), a < c < b$$

を満たす実数 c が存在する

〔注〕 $\int f(x) dx = F(x)$ ($F'(x) = f(x)$) とすれば,

$$\text{左辺} = \frac{F(b) - F(a)}{b - a}$$

であるから, 平均値の定理を適用すれば

$$\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(c) = f(c), a < c < b$$

を満たす実数 c が存在する。となり, 平均値の定理そのものである。

例9

(1) 極限值 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$ を求めよ.

(2) a を定数, n を正の整数とし, $I_n = \int_a^{a+\frac{1}{n}} x \cos^2(x-a) dx$ とする。

$\lim_{n \rightarrow \infty} n I_n$ を求めよ。

解説

(1) $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ とすると,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} \int_1^x \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} [F(t)]_1^x \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{F(x) - F(1)}{x-1} = F'(1) \text{ (微分係数の定義)} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

別解 積分の平均値の定理

積分の平均値の定理より

$$\frac{1}{x-1} \int_1^x \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \frac{1}{\sqrt{c^2+1}}$$

を満たす c が 1 と x の間に存在する

$x \rightarrow 1$ とすると, $c \rightarrow 1$ より

$$\text{与式} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2) $F'(x) = x \cos^2(x-a)$ とすると,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F\left(a + \frac{1}{n}\right) - F(a)}{\frac{1}{n}} = F'(a) = a$$

別解

積分の平均値の定理より

$$n \int_a^{a+\frac{1}{n}} x \cos^2(x-a) dx = c \cos^2(c-a), \quad a \leq c \leq a + \frac{1}{n}$$

を満たす c が存在する

$n \rightarrow \infty$ とすると, $c \rightarrow a$ より

$$\text{与式} = a \cos^2 0 = a$$