

3.3 ω (オメガ)

(1) ω (オメガ)

$x^3=1$ (1 の 3 乗根) を解くと,

$$x^3-1=0$$

$$(x-1)(x^2+x+1)=0 \quad \therefore x=1, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

となります。このとき、 $x^3=1$ の虚数解の 1 つを ω とおく。

ω は $\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ でも、 $\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ でも、どちらでも構わない。

このとき、以下の性質が成り立つ。

ω (オメガ) の性質

(1) $\omega^3=1$

(2) $\omega^2+\omega+1=0$

(3) $x^3=1$ の解は $1, \omega, \omega^2$

(4) $\overline{\omega}=\omega^2, \overline{(\omega^2)}=\omega$

(5) a, b が実数のとき

$$a\omega+b=0 \Leftrightarrow a=0, b=0$$

(1) ω は $x^3=1$ の解であるから、成り立つ。

(2) $x^3=1$ の虚数解、すなわち、 $x^2+x+1=0$ の解であるから、成り立つ。

(3) $x^3=1$ は 3 次方程式なので、3 つの解をもつ。

したがって、1 と ω と ω^2 が異なるものであることを示せばよい。

まず、 ω は虚数なので、 $\omega \neq 1$ は明らか。

$\omega^2=1$ と仮定すると、両辺に ω をかけて、

$$\omega^3=\omega \quad \therefore \omega=1$$

となり矛盾するので、 $\omega^2 \neq 1$

$\omega^2=\omega$ と仮定すると、両辺 ω で割って、

$$\omega=1$$

となり矛盾するので、 $\omega^2 \neq \omega$

(4) $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ や $\omega = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ として計算しても示せるが、

$x^2+x+1=0$ において、この解が $\omega, \overline{\omega}$ であるから、
解と係数の関係より

$$\omega \overline{\omega} = 1$$

また、 $\omega^3=1$ より

$$\overline{\omega} = \omega^2$$

これを利用して、

$$(\overline{\omega^2}) = \overline{(\overline{\omega})} = \omega$$

(5) $\leftarrow$ は明らかなので、 $\rightarrow$ を示す。

まず、 $a=0$ を示す。

$a=0$ と仮定すると

$$\omega = -\frac{b}{a}$$

となり、虚数=実数となり矛盾するので、 $a=0$

このとき、元の式は $b=0$ となる。

例1

方程式 $x^3=1$ の虚数解の1つを ω とする。実数 a, b に対して、等式 $(\omega^2+a\omega)(\omega+b)=-3$ が成り立つとき、 a の値を求めよ。

解説

ω は方程式 $x^2+x+1=0$ の1つの解より、 $\omega^2+\omega+1=0$

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$ より、 $\omega^3-1=0 \quad \therefore \omega^3=1$

$(\omega^2+a\omega)(\omega+b)=-3$ より

$$\omega^3+(a+b)\omega^2+ab\omega+3=0$$

$$1+(a+b)(-\omega-1)+ab\omega+3=0$$

$$\therefore a+b-4+(a+b-ab)\omega=0$$

a, b は実数より

$$a+b-4=0, a+b-ab=0 \quad \therefore a+b=4, ab=4$$

a, b は t の2次方程式 $t^2-4t+4=0$ の解より

$$a=b=2 \quad \therefore a=2$$

例2

2 次方程式 $x^2 + x + 1 = 0$ の解の片方 (どちらでもよい) を ω とする。このとき $\omega^3 = \boxed{}$, $(1 + \omega)(1 + \omega^2) = \boxed{}$ であり, また, $\omega^2 + \omega + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} = \boxed{}$ である。

解説

ω は $x^2 + x + 1 = 0$ の解の 1 つより

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0 \quad \therefore \omega^2 = -\omega - 1$$

$$\omega^3 = \omega \omega^2 = \omega(-\omega - 1) = -\omega^2 - \omega = -(-\omega - 1) - \omega = \textcircled{1} 1$$

別解

$$\omega^2 + \omega + 1 = 0$$

両辺に $\omega - 1$ をかけて

$$(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0 \quad \omega^3 - 1 = 0 \quad \therefore \omega^3 = 1$$

$$(1 + \omega)(1 + \omega^2) = -\omega^2(-\omega) = \omega^3 = \textcircled{1} 1$$

$$\omega^2 + \omega + \frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega^2} = \omega^2 + \omega + \omega^2 + \omega = 2(\omega^2 + \omega) = 2 \cdot (-1) = \textcircled{2} -2$$

例3

ω が $x^2 + x + 1 = 0$ の解の 1 つであるとき, 次の式の値を求めよ。

$$(1) \quad \frac{1}{\omega^8} + \frac{1}{\omega^4} \qquad (2) \quad 2\omega^{300} + \omega^{200} + \omega^{100} + 1$$

$$(3) \quad (\omega^{200} + 1)^{100} + (\omega^{100} + 1)^{10} + 2$$

解説

ω は $x^2 + x + 1 = 0$ の解の 1 つより, $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

$$(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0 \text{ より, } \omega^3 - 1 = 0 \quad \therefore \omega^3 = 1$$

$$(1) \quad \frac{1}{\omega^8} + \frac{1}{\omega^4} = \frac{\omega}{\omega^9} + \frac{\omega^2}{\omega^6} = \frac{\omega}{(\omega^3)^3} + \frac{\omega^2}{(\omega^3)^2} = \omega + \omega^2 = -1$$

$$(2) \quad 2\omega^{300} + \omega^{200} + \omega^{100} + 1 = 2(\omega^3)^{100} + (\omega^3)^{66} \cdot \omega^2 + (\omega^3)^{33} \cdot \omega + 1 \\ = 2 + \omega^2 + \omega + 1 = 2$$

$$(3) \quad (\omega^{200} + 1)^{100} + (\omega^{100} + 1)^{10} + 2 \\ = (\omega^2 + 1)^{100} + (\omega + 1)^{10} + 2 \\ = (-\omega)^{100} + (-\omega^2)^{10} + 2 = \omega^{100} + \omega^{20} + 2$$

$$= \omega + (\omega^3)^6 \cdot \omega^2 + 2$$

$$= \omega + \omega^2 + 2 = 1$$

例4

方程式 $x^2 + x + 1 = 0$ の解の 1 つを ω とする.

(1) $\omega^3 = 1$ であることを示せ.

(2) $\omega^{10} + \omega^5 + 3$ の値を求めよ.

(3) $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \cdots + \omega^{30}$ の値を求めよ.

解説

(1) ω は $x^2 + x + 1 = 0$ の解の 1 つより, $\omega^2 + \omega + 1 = 0$

$$\omega^3 - 1 = (\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0 \quad \therefore \omega^3 = 1$$

(2) $\omega^{10} + \omega^5 + 3 = (\omega^3)^3 \cdot \omega + \omega^3 \cdot \omega^2 + 3 = (\omega^2 + \omega + 1) + 2 = 2$

(3) $1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \cdots + \omega^{30}$

$$= (1 + \omega + \omega^2) + \omega^3(1 + \omega + \omega^2) + \omega^6(1 + \omega + \omega^2)$$

$$+ \cdots + \omega^{27}(1 + \omega + \omega^2) + (\omega^3)^{10}$$

$$= 0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + 1^{10} = 1$$

例5

方程式 $x^2 + x + 1 = 0$ の解を α, β とするとき, $\alpha^{2011} + \beta^{2011}$ の値を求めよ.

解説

α, β は $x^2 + x + 1 = 0$ の 2 解より

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0, \quad \beta^2 + \beta + 1 = 0$$

よって

$$(\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 1) = 0, \quad (\beta - 1)(\beta^2 + \beta + 1) = 0$$

$$\therefore \alpha^3 = 1, \quad \beta^3 = 1$$

よって

$$\alpha^{2011} + \beta^{2011} = \alpha^{3 \times 670 + 1} + \beta^{3 \times 670 + 1}$$

$$= (\alpha^3)^{670} \cdot \alpha + (\beta^3)^{670} \cdot \beta$$

$$= 1^{670} \cdot \alpha + 1^{670} \cdot \beta$$

$$= \alpha + \beta$$

解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -1$$

よって

$$\alpha^{2011} + \beta^{2011} = \alpha + \beta = -1$$

例6

3次方程式 $x^3 + 1 = 0$ の -1 でない解の1つを α とするとき、

$$(3 + 7\alpha)(7 + 3\alpha) - 4(1 + \alpha^2) = \boxed{} \alpha \text{ となる。}$$

解説

$$x^3 + 1 = 0$$

$$(x + 1)(x^2 - x + 1) = 0$$

$$\alpha \neq -1 \text{ より, } \alpha^2 - \alpha + 1 = 0$$

よって

$$\begin{aligned} (3 + 7\alpha)(7 + 3\alpha) - 4(1 + \alpha^2) &= 21 + 58\alpha + 21\alpha^2 - 4 - 4\alpha^2 \\ &= 17\alpha^2 + 58\alpha + 17 \\ &= 17(\alpha^2 + 1) + 58\alpha \\ &= 17\alpha + 58\alpha = 75\alpha \end{aligned}$$

例7

$x^2 - x + 1 = 0$ の1つの解を ω とするとき、 $\omega^{12} + 6\omega^{10} + 15\omega^8 + 20\omega^6 + 15\omega^4 + 6\omega^2 + 1$ の値を求めよ。

解説

$$\omega \text{ は } x^2 - x + 1 = 0 \text{ の解の1つより, } \omega^2 - \omega + 1 = 0$$

$$(\omega + 1)(\omega^2 - \omega + 1) = 0 \text{ より, } \omega^3 + 1 = 0 \quad \therefore \omega^3 = -1$$

よって

$$\begin{aligned} &\omega^{12} + 6\omega^{10} + 15\omega^8 + 20\omega^6 + 15\omega^4 + 6\omega^2 + 1 \\ &= (\omega^3)^4 + 6(\omega^3)^3\omega + 15(\omega^3)^2\omega^2 + 20(\omega^3)^2 + 15\omega^3\omega + 6\omega^2 + 1 \\ &= 1 - 6\omega + 15\omega^2 + 20 - 15\omega + 6\omega^2 + 1 \\ &= 21\omega^2 - 21\omega + 22 = 21 \cdot (-1) + 22 = 1 \end{aligned}$$

別解

$$\text{与式} = {}_6C_0\omega^{12} + {}_6C_1\omega^{10} + {}_6C_2\omega^8 + \cdots + {}_6C_6 \cdot 1$$

$$(x + 1)^6 = {}_6C_0x^6 + {}_6C_1x^5 + \cdots + {}_6C_6 \cdot 1 \text{ に } x = \omega^2 \text{ を代入して}$$

$$\text{与式} = (\omega^2 + 1)^6 = \omega^6 = (\omega^3)^2 = (-1)^2 = 1$$

(2) ω の剰余の問題への応用

整式を x^2+x+1 や x^3-1 で割ったときの余りを求めるとき, $x=\omega$ を代入すると簡単に求めることができる。

例8

x の整式 $P(x)=x^{75}-2x^{50}+3x^{25}$ を x^2+x+1 で割った余りを $ax+b$ とする。ただし, a, b は実数である。

- (1) $x^2+x+1=0$ の解の1つを ω とするとき, $P(\omega)$ を, a, b を含まない ω の1次式で表せ。
- (2) a, b の値を求めよ。
- (3) $P(x)$ を x^2-x+1 で割った余りを求めよ。

解説

(1) ω は $x^2+x+1=0$ の解の1つより, $\omega^2+\omega+1=0$

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$ より, $\omega^3-1=0 \quad \therefore \omega^3=1$

$$\begin{aligned} P(\omega) &= \omega^{75} - 2\omega^{50} + 3\omega^{25} = (\omega^3)^{25} - 2(\omega^{16})^3 \omega^2 + 3(\omega^3)^8 \omega \\ &= 1 - 2\omega^2 + 3\omega \\ &= 1 - 2(-\omega - 1) + 3\omega \\ &= 5\omega + 3 \end{aligned}$$

(2) $P(x)$ を x^2+x+1 で割ったときの商を $Q_1(x)$ とおくと

$$P(x) = (x^2+x+1)Q_1(x) + ax+b$$

$x=\omega$ を代入して

$$\begin{aligned} P(\omega) &= (\omega^2+\omega+1)Q_1(\omega) + a\omega + b \\ &= a\omega + b \end{aligned}$$

(1)より

$$a\omega + b = 5\omega + 3$$

a, b は実数より, $a=5, b=3$

(3) $P(x)$ を x^2-x+1 で割ったときの商を $Q_2(x)$, 余りを $cx+d$ (c, d は実数) とおくと

$$P(x) = (x^2-x+1)Q_2(x) + cx+d$$

$x=-\omega$ を代入すると

$$\begin{aligned} P(-\omega) &= (\omega^2+\omega+1)Q_2(-\omega) - c\omega + d \\ &= -c\omega + d \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}P(-\omega) &= (-\omega)^{75} - 2(-\omega)^{50} + 3(-\omega)^{25} = -1 - 2\omega^2 - 3\omega \\&= -1 - 2(-\omega - 1) - 3\omega \\&= -\omega + 1 \text{ より}\end{aligned}$$

$$-c\omega + d = -\omega + 1$$

c, d は実数より, $c=1, d=1$

よって, 求める余りは, $x+1$

例9

整式 $f(x)$ は $x-1$ で割ると余りが 3 である。また, $f(x)$ を x^2+x+1 で割ると余りが $4x+5$ である。このとき, $f(x)$ を x^3-1 で割ったときの余りを求めよ。

解説

$f(x)$ を $x-1$ で割った余りが 3 より, $f(1)=3$

$f(x)$ を x^2+x+1 で割ったときの余りが $4x+5$ より, このときの商を $Q_1(x)$ とおくと

$$f(x) = (x^2+x+1)Q_1(x) + 4x+5$$

$x=\omega$ (ω は $x^3=1$ の虚数解の 1 つ) を代入して, $f(\omega)=4\omega+5$

$f(x)$ を x^3-1 で割った商を $Q(x)$, 余りを ax^2+bx+c (a, b, c は実数) とおくと

$$\begin{aligned}f(x) &= (x^3-1)Q(x) + ax^2+bx+c \\&= (x-1)(x^2+x+1)Q(x) + ax^2+bx+c\end{aligned}$$

$x=1$ を代入して $a+b+c=3$

$x=\omega$ を代入して

$$a\omega^2+b\omega+c=4\omega+5$$

$$a(-\omega-1)+b\omega+c=4\omega+5$$

$$(-a+b)\omega-a+c=4\omega+5$$

a, b, c は実数より

$$-a+b=4, -a+c=5 \quad \therefore a=-2, b=2, c=3$$

よって, 余りは $-2x^2+2x+3$

例10

m, n は正の整数とする.

(1) $x^{3m}+1$ を x^3-1 で割った余りを求めよ.

(2) x^n+1 を x^2+x+1 で割った余りを求めよ.

解説

(1) $x^{3m}+1$ を x^3-1 で割ったときの商を $Q_1(x)$, 余りを ax^2+bx+c (a, b, c は実数)とおくと

$$x^{3m}+1=(x^3-1)Q_1(x)+ax^2+bx+c$$

$x=1$ を代入して, $2=a+b+c$

$x=\omega$ (ただし, ω は $x^3=1$ の虚数解の1つ)を代入して

$$\omega^{3m}+1=a\omega^2+b\omega+c$$

$$2=a(-\omega-1)+b\omega+c$$

$$2=(-a+b)\omega-a+c$$

a, b, c は実数より

$$-a+b=0, -a+c=2 \quad \therefore a=0, b=0, c=2$$

よって, 余りは2

(2) x^n+1 を x^2+x+1 で割ったときの商を $Q_2(x)$, 余りを $ax+b$ (a, b は実数)とおくと

$$x^n+1=(x^2+x+1)Q(x)+ax+b$$

$x=\omega$ を代入して

$$\omega^n+1=a\omega+b$$

(i) $n=3k$ ($k=1, 2, \dots$) のとき

$$\omega^n=\omega^{3k}=(\omega^3)^k=1 \text{ より}$$

$$2=a\omega+b \quad \therefore a=0, b=2$$

よって, 余りは2

(ii) $n=3k+1$ ($k=0, 1, 2, \dots$) のとき

$$\omega^n=\omega^{3k+1}=(\omega^3)^k \cdot \omega=\omega \text{ より}$$

$$\omega+1=a\omega+b \quad \therefore a=1, b=1$$

よって, 余りは $x+1$

(iii) $n=3k+2$ ($k=0, 1, 2, \dots$) のとき

$$\omega^n=\omega^{3k+2}=(\omega^3)^k \cdot \omega^2=\omega^2=-\omega-1 \text{ より}$$

$$-\omega=a\omega+b \quad \therefore a=-1, b=0$$

よって, 余りは $-x$

補1

ω を $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ を満たす複素数とすると、次の問いに答えよ。

(1) $\omega^3 = 1$ であることを示せ。

(2) 次の式 P を展開し、 a, b, c のみの式で表せ。

$$P = (a + b + c)(a + b\omega + c\omega^2)(a + b\omega^2 + c\omega)$$

解説

(1) $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ の両辺に $\omega - 1$ を掛けると

$$(\omega - 1)(\omega^2 + \omega + 1) = 0$$

$$\omega^3 - 1 = 0 \quad \therefore \omega^3 = 1$$

(2) $(a + b\omega + c\omega^2)(a + b\omega^2 + c\omega)$

$$= a^2 + ab\omega^2 + ac\omega^4 + ab\omega + b^2\omega^3 + bc\omega^5 + ca\omega^2 + cb\omega^4 + c^2\omega^6$$

$$= a^2 + ab\omega^2 + ca\omega + ab\omega + b^2 + bc\omega^2 + ca\omega^2 + bc\omega + c^2$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + ab(\omega^2 + \omega) + bc(\omega^2 + \omega) + ca(\omega^2 + \omega)$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

よって

$$P = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

参考 この結果より、

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

$$= (a + b + c)(a + b\omega + c\omega^2)(a + b\omega^2 + c\omega)$$

と因数分解できる。これは、3次方程式の解の公式である、カルダノの公式の導出にも利用される。

補2

- (1) 多項式 $(x^5+1)^2$ を x^2+x+1 で割った余りを $Ax+B$ とすると, 定数 A と B は $A=\boxed{}$, $B=\boxed{}$ である。
- (2) 整式 $f(x)=x^{20}+ax^{10}+b$ が x^2+x+1 で割り切れるとき, 実数の定数 a, b の値を求めよ。

解説

- (1) $(x^5+1)^2$ を x^2+x+1 で割った商を $Q(x)$ とおくと

$$(x^5+1)^2=(x^2+x+1)Q(x)+Ax+B$$

$x=\omega$ (ω は $x^3=1$ の虚数解の1つ)を代入して

$$(\omega^5+1)^2=A\omega+B$$

ここで,

$$(\omega^5+1)^2=(\omega^2+1)^2=(-\omega)^2=\omega^2=-\omega-1$$

より, $A=-1, B=-1$

- (2) $f(x)$ を x^2+x+1 で割った商を $Q(x)$ とおくと

$$f(x)=(x^2+x+1)Q(x)$$

$x=\omega$ (ω は $x^3=1$ の虚数解の1つ)を代入して

$$f(\omega)=0$$

ここで,

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \omega^{20} + a\omega^{10} + b = (\omega^3)^6 \cdot \omega^2 + a \cdot (\omega^3)^3 \cdot \omega + b = \omega^2 + a\omega + b \\ &= (-1-\omega) + a\omega + b = b-1 + (a-1)\omega \end{aligned}$$

よって

$$b-1+(a-1)\omega=0$$

a, b は実数より

$$b-1=0, a-1=0 \quad \therefore a=1, b=1$$

補3

正の整数 n に対し, $f(z) = z^{2n} + z^n + 1$ とする.

(1) $f(z)$ を $z^2 + z + 1$ で割ったときの余りを求めよ.

(2) $f(z)$ を $z^2 - z + 1$ で割ったときの余りを求めよ.

(解説)

(1) $z^{2n} + z^n + 1$ を $z^2 + z + 1$ で割ったときの商を $Q_1(z)$, 余りを $az + b$ (a, b は実数) とすると

$$z^{2n} + z^n + 1 = (z^2 + z + 1)Q_1(z) + az + b$$

$z = \omega$ (ω は $x^3 = 1$ の虚数解の 1 つ) を代入すると

$$\omega^{2n} + \omega^n + 1 = a\omega + b$$

(i) $n = 3k$ (k は正の整数) のとき

$$1 + 1 + 1 = a\omega + b \quad \therefore a\omega + b = 3$$

a, b は実数より, $a = 0, b = 3$

よって, 余りは 3

(ii) $n = 3k + 1$ (k は負でない整数) のとき

$$\omega^2 + \omega + 1 = a\omega + b \quad \therefore a\omega + b = 0$$

a, b は実数より, $a = 0, b = 0$

よって, 余りは 0

(iii) $n = 3k + 2$ (k は負でない整数) のとき

$$\omega + \omega^2 + 1 = a\omega + b \quad \therefore a\omega + b = 0$$

a, b は実数より, $a = 0, b = 0$

よって, 余りは 0

(2) $z^{2n} + z^n + 1$ を $z^2 - z + 1$ で割ったときの商を $Q_2(z)$, 余りを $cz + d$ (c, d は実数) とすると

$$z^{2n} + z^n + 1 = (z^2 - z + 1)Q_2(z) + cz + d$$

$z = \alpha$ (α は $x^3 = -1$ の虚数解の 1 つ) を代入すると ($\alpha^6 = 1$)

$$\alpha^{2n} + \alpha^n + 1 = c\alpha + d$$

(i) $n = 6k$ (k は正の整数) のとき

$$1 + 1 + 1 = c\alpha + d \quad \therefore c\alpha + d = 3$$

c, d は実数より, $c = 0, d = 3$

よって, 余りは 3

(ii) $n=6k+1$ (k は負でない整数) のとき

$$\alpha^2 + \alpha + 1 = c\alpha + d \quad c\alpha + d = 2\alpha$$

c, d は実数より, $c=2, d=0$

よって, 余りは $2z$

(iii) $n=6k+2$ (k は負でない整数) のとき

$$-\alpha + \alpha^2 + 1 = c\alpha + d \quad \therefore c\alpha + d = 0$$

c, d は実数より, $c=0, d=0$

よって, 余りは 0

(iv) $n=6k+3$ (k は負でない整数) のとき

$$1 - 1 + 1 = c\alpha + d \quad \therefore c\alpha + d = 1$$

c, d は実数より, $c=0, d=1$

よって, 余りは 1

(v) $n=6k+4$ (k は負でない整数) のとき

$$\alpha^2 - \alpha + 1 = c\alpha + d \quad \therefore c\alpha + d = 0$$

c, d は実数より, $c=0, d=0$

よって, 余りは 0

(vi) $n=6k+5$ (k は負でない整数) のとき

$$-\alpha - \alpha^2 + 1 = c\alpha + d \quad \therefore c\alpha + d = -2\alpha + 2$$

c, d は実数より, $c=-2, d=2$

よって, 余りは $-2z + 2$