53 [2006 自治医科大]

実数 x，y，z は

$$x+y+3z-19=0,\ 3x-y+z-13=0,\ y\geqq 1,\ z\geqq 1$$

を満たしながら変わる。このとき，

$$y={}^{ア}\boxed{}x-{}^{イ}\boxed{},\quad z={}^{ウ}\boxed{}-x$$

であるから，x のとりうる値の範囲は ${}^{エ}\boxed{}\leqq x\leqq{}^{オ}\boxed{}$ である。

したがって，$x^2+y^2+z^2$ は

$x={}^{カ}\boxed{}$，$y={}^{キ}\boxed{}$，$z={}^{ク}\boxed{}$ のとき最大値 ${}^{ケ}\boxed{}$，

$x={}^{コ}\boxed{}$，$y={}^{サ}\boxed{}$，$z={}^{シ}\boxed{}$ のとき最小値 ${}^{ス}\boxed{}$

をとる。

54

実数 x, y, z が $2x+5y-4z=9, x+3y-3z=5$ を満たすとき

(1) x と y を z で表せ.

(2) $x^2+y^2+z^2$ が最小となる x, y, z を求めよ.

(3) $x^2+y^2+z^2$ が最小となる整数 x, y, z を求めよ.

55 [2007 首都大学東京]

実数 x，y，z についての 5 つの条件

$$\begin{cases} x>0 \\ y>0 \\ z>0 \\ x+y+z=12 \\ 5x-3z=0 \end{cases}$$

に対して，次の問いに答えよ。

(1)　実数 x，y，z が上記 5 つの条件を満たすとき，不等式 $x<\dfrac{9}{2}$ が成り立つことを示せ。

(2)　実数 x，y，z が上記 5 つの条件を満たすとき，積 xyz を x の関数 $f(x)$ として表せ。

(3)　(2) の $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(4)　上記 5 つの条件を満たす実数の組 $(x,\ y,\ z)$ のうち，積 xyz を最大にするものを求めよ。

56 [Ⅰ．2010 神戸薬科大　Ⅱ．2017 大阪大]

Ⅰ．次の条件を満たす 3 つの実数 x，y，z がある。

$$x\leqq y\leqq z,\ x+y+z=6,\ z-x=2$$

(1)　x のとりうる値の範囲は $\boxed{}$ である。

(2)　積 xyz を x の式で表すと $\boxed{}$ である。

(3)　積 xyz のとりうる値の範囲は $\boxed{}$ である。

Ⅱ．実数 x，y，z が $x+y+z=1$，$x+2y+3z=5$ を満たすとする。

(1)　$x^3+y^3+z^3-3xyz$ の最小値を求めよ。

(2)　$z\geqq 0$ のとき，xyz が最大となる z の値を求めよ。

$\boxed{57}$ [早稲田大]

x, y, z が実数で $x+y+z=1$ のとき

(1) $xy+yz+zx$ の最大値を求めよ.

(2) $x^2+y^2+z^2$ の最小値を求めよ.

$\boxed{58}$

実数 x, y, z が $x+2y+z=1$ をみたしながら変わるとき, $2x^2-y^2+z^2$ の最小値とそのときの x, y, z の値を求めよ.

$\boxed{59}$ [慶応義塾大]

実数 x, y, z が $x+y+z=6, xyz=8$ をみたすとき, z のとりうる値の範囲を定めると,

$z<\boxed{}$ または $z=\boxed{}$ または $\boxed{}\leqq z$ である.

$\boxed{60}$ [(3) 2003 熊本県立大]

(1) x, y, z が実数で, $x+y=1, x^2+y^2+z^2=1$ をみたすとき, z のとり得る範囲を求めよ.

(2) x, y, z は実数で, $x+y+z=4, xy+yz+zx=-3$ のとき, x のとりうる値の範囲を求めよ.

(3) x, y, z を実数とする. $x+y+z=0$, $xyz=2$ であるとき, z のとりうる値の範囲を求めよ.

$\boxed{61}$ [Ⅰ．2011 武庫川女子大　Ⅱ．2017 日本女子大　Ⅲ．早稲田大]

Ⅰ．3つの実数 x，y，z は次の条件を同時に満たす。

$$\begin{cases} 4x+y+z=0 \\ 6x^2-yz-18=0 \end{cases}$$

このとき，x のとりうる値の範囲は ${}^{ア}\boxed{} \leqq x \leqq {}^{イ}\boxed{}$ である。

また，$-2x^3+y^2+z^2$ は $x={}^{ウ}\boxed{}$，$y={}^{エ}\boxed{}$，$z={}^{オ}\boxed{}$ のとき最小値 ${}^{カ}\boxed{}$ をとる。

Ⅱ．実数 x，y，z が $x^2+y^2+z^2=3$，$y+z=\sqrt{3}$ を満たすとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$x^3+y^3+z^3$ を x の式で表せ。

(2)　x のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　$x^3+y^3+z^3$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

Ⅲ．実数 x, y, z が $x+y+z=2, xy+yz+zx=1$ を満たす．

(1) z のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) xyz を z の式で表せ．

(3) xyz の最小値と，そのときの x, y, z の値を求めよ．

$\boxed{62}$ [Ⅰ.2007 名城大　Ⅱ.2011 岐阜聖徳学園大　Ⅲ.学習院大　Ⅳ.東京都立大]

Ⅰ．x，y，z は，$x=1-y-z$，$x^2=1+yz$ を満たす実数とする。

(1)　x のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$x^3+y^3+z^3$ を x を用いて表せ。

(3)　$x^3+y^3+z^3$ の最大値，最小値を求めよ。

Ⅱ．a，b，c は0以上の実数で $\begin{cases} a+b=1 \\ a^2+b^2+c^2=\dfrac{7}{4} \end{cases}$ を満たしている。

(1)　c のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$a^3+b^3+c^3$ の最大値を求めよ。

Ⅲ．実数 x, y, z が等式 $x^2+y^2+z^2=1, xy+yz+zx=\dfrac{1}{2}$ を同時に満たす．

(1) $x+y+z$ の値を求めよ．

(2) xyz のとり得る値の範囲を求めよ．

Ⅳ．実数 x, y, z が $x+y+z=0, x^2+y^2+z^2=6$ を満たすとき

(1) x のとり得る値の範囲を求めよ．

(2) $x^3+y^3+z^3$ の最大値と最小値を求めよ．

$\boxed{63}$ [京都府立医科大]

x, y, z は実数で，$x+2y+3z=1, xy+yz+zx=-1$ のとき，$x+y+z$ の最大値と最小値を求めよ．

$\boxed{64}$ [2013 東京電機大]

ある直方体の縦の長さ x，横の長さ y，高さ z が $4x+y=12$，$x+y+z=18$ を満たすとする。この直方体の体積を V とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　y と z をそれぞれ x で表し，更に，x のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　V を x で表せ。

(3)　V が最大となるときの x の値を求めよ。

$\boxed{65}$ [1997 明治大]

(1)　縦と横の長さの和が一定である長方形のうちでは，正方形が面積最大であることを示せ．

(2)　上の結果を参考にして，縦の長さ，横の長さ，高さの和が一定である直方体のうちでは，立方体が体積最大であることを示せ．

$\boxed{66}$ [2010 東京大]

3 辺の長さが a と b と c の直方体を，長さが b の 1 辺を回転軸として 90° 回転させるとき，直方体が通過する点全体が作る立体を V とする。

(1)　V の体積を a，b，c を用いて表せ。

(2)　$a+b+c=1$ のとき，V の体積のとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{67}$［2007 埼玉大］

(1)　3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ の解が α，β，γ であるとき，3 つの係数 a，b，c を α，β，γ で表せ。

(2)　次の 2 条件　(ｉ)　縦，横，高さを加えると 9 m になる。

　(ii)　表面積は 48 m^2 である。

を満たす直方体の体積のうちで最大のものを求めよ。

$\boxed{68}$［2016 同志社大］

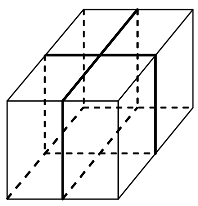
(1)　長方形 R の縦の長さを x，横の長さを y とする。$x+y=2$ であるとき，長方形 R の面積を最大にする x，y の値を求めよ。

(2)　直方体 C の縦の長さを x，横の長さを y，高さを z とする。3 辺の和について $x+y+z=12$ であり，かつ表面積について $2(xy+yz+zx)=72$ であるような直方体 C が存在するための x の値の範囲を求めよ。

(3)　直方体 C の縦の長さを x，横の長さを y，高さを z とする。3 辺の和について $x+y+z=12$ であり，かつ表面積について $2(xy+yz+zx)=72$ であるとき，直方体 C の体積を最大にする x，y，z の値をそれぞれ求めよ。

$\boxed{69}$［2001 東京学芸大］

図のように直方体の各辺に平行に 2 本のひもがかけてある．ひもの長さの和は 16 で，直方体の表面積は 16 である．このような直方体の体積 V の最大値を求めよ．



$\boxed{70}$［2020 早稲田大］

縦 x cm，横 y cm，高さ z cm の直方体がある。この直方体の対角線の長さは 3 cm，全表面積は 16 cm^2 である。

(1)　$x+y+z$ の値は $\boxed{}$ である。

(2)　この直方体の最小の体積は $\boxed{}$ cm^3 である。

(3)　この直方体が最大の体積をもつとき，最も長い辺の長さは $\boxed{}$ cm である。

$\boxed{71}$［京都大］

xyz 空間で，原点 O を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の球面 S と 3 点 $(4, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$, $(0, 0, 4)$ を通る平面 α が共有点をもつことを示し，点 (x, y, z) がその共有点全体を動くとき，積 xyz がとり得る値の範囲を求めよ．

$\boxed{72}$［南山大］

実数 x, y が $x^2+y^2=5$ を満足するように変わるとき， xy の最大値は $\boxed{}$ である．また， x, y, z が $xy+yz+zx=10$ を満足するように変わるとき， $x^2+y^2+z^2$ の最小値は $\boxed{}$ である．

$\boxed{73}$［2008 公立はこだて未来大］

x，y，z を実数とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$x^2+y^2+z^2 \geqq xy+yz+zx$ を示し，等号が成り立つときの x，y，z の条件を求めよ。

(2)　$x+y+z=1$ のとき，$xy+yz+zx \leqq \dfrac{1}{3}$ を示し，等号が成り立つときの x，y，z の値をすべて求めよ。

$\boxed{74}$［京都産業大］

(1) 不等式 $(a^2+b^2+c^2)(p^2+q^2+r^2) \geqq (ap+bq+cr)^2$ を示せ．ただし， a, b, c, p, q, r は実数とする．

(2) 実数 p, q, r が $p^2+q^2+r^2=6$ を満たしながら動くとき， $p+q+2r$ の最大値，最小値を求めよ．

(3) 実数 p, q, r が $p+q+r=8$ を満たしながら動くとき $p^2+q^2+4r^2+2q$ の最小値と，そのときの p, q, r の値を求めよ．

$\boxed{75}$［(1) 小樽商科大］

(1) $x^2+y^2+z^2=1$ のとき， $x+2y+3z$ の最大値とそのときの x, y, z の値を求めよ

(2) x, y, z, w が実数で， $x^2+y^2+z^2+w^2=1$ のとき， $x+2y+3z+4w$ の最大値と最小値を求めよ．

$\boxed{76}$［慶応義塾大］

(1) 実数 x, y が $x+y=1$ を満たすならば， x^2+y^2 の最小値は $\boxed{}$ である．

(2) 実数 x, y, z が $x+2y+3z=1$ を満たすならば， $x^2+y^2+z^2$ は $x=\boxed{}$, $y=\boxed{}$, $z=\boxed{}$ のとき，最小値 $\boxed{}$ をとる．

高2数学　夏期講習　最大･最小問題　第5講　多変数関数の最大･最小

$\boxed{77}$［Ⅰ．2014 早稲田大　Ⅱ．横浜国立大］

Ⅰ．実数 a，b，c が $a+b+c=8$，$a^2+b^2+c^2=32$ を満たすとき，実数 c の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ である。

Ⅱ．(1) 任意の実数 x, y, z について，$(x+y+z)^2 \leqq 3(x^2+y^2+z^2)$ が成り立つことを証明せよ．

(2) 実数 x, y, z, t が $x+y+z+t=6, x^2+y^2+z^2+t^2=12$ をみたすとき，t の最大値と最小値を求めよ．

$\boxed{78}$［(1) 東京薬科大］

(1) 実数 a, b, c, d は 2 つの等式 $a+b+c+d=7, a^2+b^2+c^2+d^2=13$ をみたしている．このとき，d のとりうる値の範囲を求めよ．

(2) 実数 x, y, z, u, v が $x+y+z+u+v=8, x^2+y^2+z^2+u^2+v^2=16$ を満たすとき，x のとりうる値の最大値を求めよ．

$\boxed{79}$［Ⅱ．1996 東北学院大］

Ⅰ．すべての正の実数 x, y に対して $(x+y)^2 \leqq k(x^2+y^2)$ が成り立つような k の最小値を求めよ．

Ⅱ．$x \geqq 0, y \geqq 0$ とし，不等式 $c(x+y) \geqq 2\sqrt{xy}$ …… ① を考える．ただし，c は正の定数である．

(1) $c \geqq 1$ のとき，① は常に成り立つことを示せ．

(2) ① が常に成り立てば，$c \geqq 1$ であることを示せ．

(3) $\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq k\sqrt{x+y}$ が常に成り立つような正の定数 k のうちで，最小なものはいくらか．

$\boxed{80}$［(1) 近畿大　(2) 1997 お茶の水女子大　(3) 東京大］

(1) 正の数 x, y に対して，つねに $(x+y)^3 \leqq k(x^3+y^3)$ が成り立つような k の最小値を求めよ．

(2) どんな正の数 x, y に対しても不等式 $(x+y)^4 \leqq c^3(x^4+y^4)$ が成り立つような c の値の範囲を求めよ．

(3) すべての正の実数 x, y に対し $\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq k\sqrt{2x+y}$ が成り立つような実数 k の最小値を求めよ．

$\boxed{81}$［福岡大］

x, y が2つの不等式 $3y \leqq -x,\ y \geqq x^2-4x+1$ を満たすとき，$p=\dfrac{y}{x}$ の値の範囲は $\boxed{}$ である．また，このとき，$q=\dfrac{x^2}{3x^2+4xy+4y^2}$ の値の範囲は $\boxed{}$ である．

$\boxed{82}$［同志社大］

x, y が2つの不等式 $y \geqq \dfrac{x}{2},\ y \leqq -x^2+3x-\dfrac{1}{4}$ を満たすとき，

$$P=\frac{x^2}{2x^2-2xy+y^2}$$

のとり得る値の最大値と最小値を求めよ．

$\boxed{83}$［藤田保健衛生大］

(1) 点 $(2, 1)$ を通り，円 $x^2+y^2=1$ に接する直線の方程式を求めよ．

(2) $0 \leqq \theta < 2\pi$ とする．このとき (1) を利用して $\dfrac{1-\sin\theta}{2-\cos\theta}$ の最大値と最小値を求めよ．

$\boxed{84}$［東京理科大］

(1) 点 $(3, 2)$ から円 $x^2+y^2=1$ に引いた接線の傾きを求めよ．

(2) $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ y-x \leqq 1 \end{cases}$ のとき，$k=\dfrac{y-2}{x-3}$ の最大値および最小値を求めよ．

(3) $\sin\theta-\cos\theta \leqq 1$ のとき，$\dfrac{\sin\theta-2}{\cos\theta-3}$ の最大値および最小値を求めよ．

$\boxed{85}$［2006 青山学院大］

θ に関する方程式 $\sin\theta-k\cos\theta=2(1-k)$ が $-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲に解をもつように定数 k の値の範囲を定めよ。

$\boxed{86}$

(1) $x>-1$ のとき，$\dfrac{x^2-2x+2}{x+1}$ の最小値を求めよ．

(2) $x>-1$ のとき，$\dfrac{x+1}{x^2-2x+2}$ の最大値を求めよ．

(3) x がすべての実数を動くとき，$\dfrac{x+1}{x^2-2x+2}$ の最大値と最小値を求めよ．

$\boxed{87}$［東京理科大］

(1) $x>-\dfrac{1}{2}$ のとき，$y=\dfrac{x^2-2x+5}{8x+4}$ のとり得る値の範囲を求めよ．

(2) $x>-\dfrac{1}{2}$ のとき，$y=\dfrac{8x+4}{x^2-2x+5}$ のとり得る値の範囲を求めよ．

(3) x が実数のとき，$y=\dfrac{8x+4}{x^2-2x+5}$ のとり得る値の範囲を求めよ．

$\boxed{88}$［2003 上智大］

(1)　k を実数の定数とする．実数 x，y が $x+2y=k$ を満たすとき，x^2+2y^2 の最小値を求めよ．

(2)　2 変数関数 $f(x,\ y)=\dfrac{x+2y+3}{x^2+2y^2+3}$ の最大値を求めよ．

$\boxed{89}$［(1) 上智大　(2) 2005 上智大］

(1) 関数 $y=\dfrac{x^2+x-1}{x^2-x+1}$ は $x=\boxed{}$ で最大値 $\boxed{}$ をとり，$x=\boxed{}$ で最小値 $\boxed{}$ をとる．

(2) $f(x)=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2-x+1}$ の最大値が 3，最小値が $\dfrac{1}{3}$ であるとき，a，b の値を求めよ。

$\boxed{90}$［Ⅰ．浜松医科大　Ⅱ．学習院大］

Ⅰ．$f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2-2x+2}$ の最大値，最小値を求めよ．またそのときの x の値も求めよ．

Ⅱ．関数 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x^2+ax+b}$

(1) $f(x)$ が最大値および最小値をもつとき，a と b の間に成り立つ関係式を求めよ．

(2) $f(x)$ の最大値が 1，最小値が -1 であるとき，a と b の値を求めよ．

$\boxed{91}$ [(1) 2006 釧路公立大　(2) 2015 産業医科大]

(1) 実数 a，b が $a>-1$，$b>-2$ であるとき，次の式の最小値を求めよ。

$$2b+\frac{2}{a+1}+\frac{2a+2}{b+2}$$

(2) $x>0,\ y>0,\ z>0$ のとき，$\dfrac{9xyz}{x^2y+18y^2z+12z^2x}$ の最大値は $\boxed{}$ である．

$\boxed{92}$ [2021 早稲田大]

正の実数 x，y，z が $\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{y}+\dfrac{3}{z}=1$ を満たすとき，$(x-1)(y-2)(z-3)$ の最小値は $\boxed{}$ である。

$\boxed{93}$

(1) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$ の最小値を求めよ．

(2) $x>0$ のとき，$f(x)=x+\dfrac{1}{x^2}$ の最小値を求めよ．

(3) $x>0$ のとき，$f(x)=x^2+\dfrac{1}{x}$ の最小値を求めよ．

$\boxed{94}$ [(1)～(3) 早稲田大　(4) 慶応義塾大]

(1) $x,\ y$ の間に $xy=4\ (x>0,\ y>0)$ の関係があるとき，$2x+3y$ の最小値とそのときの $x,\ y$ の値を求めよ．

(2) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\leqq\dfrac{1}{2},\ x>2,\ y>2$ のとき，$2x+y$ の最小値を求めよ．

(3) $x>0$ のとき，$3x+\dfrac{1}{x^3}$ の最小値とそのときの x の値を求めよ．

(4) $x,\ y$ を正の実数とするとき，$27x+\dfrac{3x}{y^2}+\dfrac{2y}{x}$ は $x=\boxed{}$，$y=\boxed{}$ において最小値 $\boxed{}$ をとる．

$\boxed{95}$［東京大］

放物線 $y=x^2$ 上に 2 点 P, Q がある．線分 PQ の中点の y 座標を h とする．

(1) 線分 PQ の長さ L と傾き m で，h を表せ．

(2) L を固定したとき，h がとりうる値の最小値を求めよ．

$\boxed{96}$［2012 東京理科大］

座標平面上において，放物線 $y=x^2$ 上に異なる 2 点 P，Q をとり，線分 PQ の中点を M とし，M の座標を $(a,\ b)$ とする。

(1)　$a=1$，$b=3$ のとき，線分 PQ の長さ PQ を求めよ。

(2)　$\mathrm{PQ}=4$ のとき，b を a の式で表せ。

(3)　$\mathrm{PQ}=4$ を満たしながら P，Q を動かすとき，b の最小値を求めよ。

$\boxed{97}$［2005 岩手大］

直方体の体積を k^3 とし，その直方体の縦，横，高さをそれぞれ，a，b，h とする。

(1)　直方体の体積 k^3 と高さ h を固定したとき，対角線の長さの 2 乗の最小値を求めよ。

(2)　体積が k^3 である直方体の中で，対角線の長さが最小となるのは立方体であることを示せ。

$\boxed{98}$［大阪市立大］

(1) a, b, c を正数とするとき，不等式 $\dfrac{a+b+c}{3} \geqq \sqrt[3]{abc}$ が成り立つことを証明せよ．また，等号が成り立つのはどのような場合か．

(2) 周の長さが一定である三角形のうちで内接円の半径が最大のものを求めよ．

99 [2003 慶応義塾大]

b_1，b_2，b_3 を正の実数とする．$a_1=b_1{}^3$，$a_2=b_2{}^3$，$a_3=b_3{}^3$ とするとき

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3}-\sqrt[3]{a_1a_2a_3}=\frac{1}{^{ア}\boxed{}}(b_1+b_2+b_3)\{(b_1-b_2)^2+(b_2-b_3)^2+(b_3-b_1)^2\}$$

となる．したがって，$\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3}\geqq\sqrt[3]{a_1a_2a_3}$ であり，等号は $a_1=a_2=a_3$ のときに限り成立する．この不等式を用いれば，正の実数 a，b に対して，

$4(a^2+ab)^3\geqq3^3(a^2b)^{^{イ}\boxed{}}$ が得られる．

底面が半径 a の円，高さが b の直円柱を考える．不等式の等号成立条件から，表面積を一定にして体積を最大にしたとき，$b={}^{ウ}\boxed{}\,a$ である．

100 [2021 札幌医科大]

体積が $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi$ の直円錐において，直円錐の側面積の最小値を求めよ。ただし直円錐とは，底面の円の中心と頂点とを結ぶ直線が，底面に垂直である円錐のことである。