理系標準問題演習　2. 極限(2)

$\boxed{1}$

(1) 初項 $x=0$ のとき収束し和 $S=0$

$x\neq 0$ のとき収束するならば

$$-1<公比\ \frac{1}{1+x}<1$$

$$\begin{cases} -(1+x)^2<1+x \\ 1+x<(1+x)^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+3x+2>0 & \therefore x<-2,\ x>-1 \\ x^2+x>0 & \therefore x<-1,\ x>0 \end{cases}$$

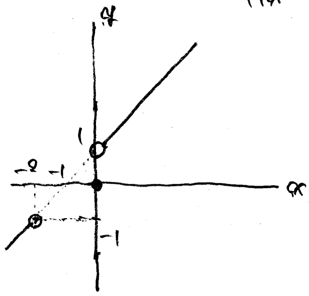
$\therefore x<-2,\ x>0$

よって

$x<-2,\ x\geqq 0$

(2) $x=0$ のとき　$f(x)=0$

$x\neq 0$ 〃　$f(x)=\dfrac{x}{1-\frac{1}{1+x}}=1+x$



<point>

1. 無限等比級数とその和

$\boxed{2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^n}+\cdots$$

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{3}}=\boxed{\frac{3}{2}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^n}\cos n\pi=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{5^n}+\cdots$$

$$=\frac{1}{1+\frac{1}{5}}=\boxed{\frac{5}{6}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{7^n}\sin\frac{n\pi}{2}=\frac{1}{7}-\frac{1}{7^3}+\frac{1}{7^5}-\cdots$$

$$=\frac{\frac{1}{7}}{1+\frac{1}{7^2}}=\frac{\frac{7}{49}}{\frac{50}{49}}=\boxed{\frac{7}{50}}$$

$\boxed{3}$

(1) $\dfrac{a}{1-\frac{1}{2}}=10$

$2a=10$　$\therefore a=5$

(2) $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P_2}+\overrightarrow{P_2P_3}+\cdots$

$$=5\binom{1}{0}+\frac{5}{2}\binom{0}{1}+\frac{5}{2^2}\binom{-1}{0}+\frac{5}{2^3}\binom{0}{-1}+\frac{5}{2^4}\binom{1}{0}+\cdots$$

$Q(x_1,y_1)$ とすると

$$x_1=5-\frac{5}{2^2}+\frac{5}{2^4}-\cdots=\frac{5}{1+\frac{1}{4}}=4$$

$$y_1=\frac{5}{2}-\frac{5}{2^3}+\frac{5}{2^5}=\frac{\frac{5}{2}}{1+\frac{1}{4}}=2$$

よって $Q(4,2)$

(3) $\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OP_1}+\overrightarrow{P_1P_2}+\cdots$

$$=5\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}+\frac{5}{2}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}+\frac{5}{2^2}\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt2}\\ -\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}+\frac{5}{2^3}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ -\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}+\frac{5}{2^4}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}+\cdots$$

$R(x_2,y_2)$ とすると

$$x_2=\frac{5}{\sqrt2}-\frac{5}{2\sqrt2}-\frac{5}{2^2\sqrt2}+\frac{5}{2^3\sqrt2}+\frac{5}{2^4\sqrt2}-\cdots$$

$$=\frac{5\sqrt2}{2}\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}-\cdots\right)$$

$$=\frac{5\sqrt2}{2}\left(1-\frac{3}{4}+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{3}{4}-\frac{1}{2^4}\cdot\frac{3}{4}+\cdots\right)$$

$$=\frac{5\sqrt2}{2}\left(1+\frac{-\frac{3}{4}}{1+\frac{1}{4}}\right)=\sqrt2$$

$$y_2=\frac{5\sqrt2}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots\right)$$

$$=\frac{5\sqrt2}{2}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2^2}\cdot\frac{3}{2}+\frac{1}{2^4}\cdot\frac{3}{2}+\cdots\right)$$

$$=\frac{5\sqrt2}{2}\cdot\frac{\frac{3}{2}}{1+\frac{1}{4}}=3\sqrt2$$

よって $R(\sqrt2,3\sqrt2)$

4.

(1) A_2の1辺の長さは

$\sqrt{a^2+(1-a)^2}=\sqrt{2a^2-2a+1}$

よって

$S_2=(\sqrt{2a^2-2a+1})^2=2a^2-2a+1$ //

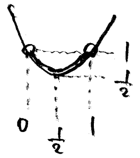
(2) A_kとA_{k+1}は相似であり

面積比は $1:2a^2-2a+1$ より

$S_{k+1}=(2a^2-2a+1)S_k$ （$\{S_k\}$は等比数列）

$\therefore S_k=(2a^2-2a+1)^{k-1}$ //

(3) 公比 $2a^2-2a+1=2(a-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$



$0<a<1$で

$\frac{1}{2}\leqq 2a^2-2a+1<1$ であるから

$\sum_{k=1}^{\infty}S_k$は収束し、その和Sは

$S=\frac{1}{1-(2a^2-2a+1)}=\frac{1}{-2a^2+2a}$ //

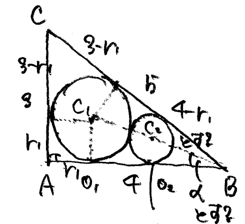
(4) $-2a^2+2a=-2(a-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}$

$0<a<1$で $0<-2a^2+2a\leqq\frac{1}{2}$ より

Sは$a=\frac{1}{2}$のとき 最小.

5.

(1) O_1の半径をr_1とすると



$(3-r_1)+(4-r_1)=5$

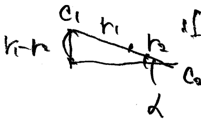
$2r_1=2$ $\therefore r_1=1$

よってO_1の面積S_1は

$S_1=\pi r_1^2=\pi$ //

（O_nの中心をC_n
半径をr_n, 面積をS_n）
とする

(2) $\sin\alpha=\frac{r_1-r_2}{r_1+r_2}$ より



$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\frac{1-r_2}{1+r_2}=\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\sqrt{10}(1-r_2)=1+r_2$

$(\sqrt{10}+1)r_2=\sqrt{10}-1$

$\therefore r_2=\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}=\frac{11-2\sqrt{10}}{9}$

よって

$S_2=\pi r_2^2$

$=\pi(\frac{11-2\sqrt{10}}{9})^2=\frac{161-44\sqrt{10}}{81}\pi$ //

(3) 同様にして

$\frac{r_n-r_{n+1}}{r_n+r_{n+1}}=\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\sqrt{10}(r_n-r_{n+1})=r_n+r_{n+1}$

$(\sqrt{10}+1)r_{n+1}=(\sqrt{10}-1)r_n$

$\therefore r_{n+1}=\frac{\sqrt{10}-1}{\sqrt{10}+1}r_n$

$S_{n+1}=\frac{161-44\sqrt{10}}{81}S_n$

$\{S_n\}$は初項 $S_1=\pi$

公比 $\frac{161-44\sqrt{10}}{81}$ の等比数列より

$\sum_{k=1}^{n}S_n=\frac{\pi\{1-(\frac{161-44\sqrt{10}}{81})^n\}}{1-\frac{161-44\sqrt{10}}{81}}$

$=\frac{81\pi}{44\sqrt{10}-80}\{1-(\frac{161-44\sqrt{10}}{81})^n\}$ //

(4) $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}S_n=\frac{81\pi}{44\sqrt{10}-80}$ = 有限値

6.

$\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})=\sum_{n=1}^{\infty}\{na_n-(n+1)a_{n+1}+a_{n+1}\}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}na_n-\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{n+1}$

$=\sum_{n=1}^{\infty}na_n-\sum_{n=2}^{\infty}na_n+\sum_{n=2}^{\infty}a_n$

$=\sum_{n=1}^{\infty}na_n-(\sum_{n=1}^{\infty}na_n-\cancel{a_1})+\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\cancel{a_1}$

$=0-0+1=1$ //

7

(1) $(1+t)^n = {}_nC_0 + {}_nC_1 t + {}_nC_2 t^2 + {}_nC_3 t^3 + \cdots + {}_nC_n t^n$

$= 1 + nt + \frac{n(n-1)}{2}t^2 + {}_nC_3 t^3 + \cdots + {}_nC_n t^n$

$\geqq 1+nt+\frac{n(n-1)}{2}t^2 \quad (t>0)$ □

(2) $0 < \frac{n}{(1+t)^n} \leqq \frac{n}{1+nt+\frac{n(n-1)}{2}t^2}$ (1)より

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{1+nt+\frac{n(n-1)}{2}t^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{t^2}{2}+\left(t-\frac{t^2}{2}\right)\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = 0$

であるからはさみうちの原理より

$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+t)^n}=0$ //

$r=\frac{1}{1+t}$ とおくと

$\lim_{n\to\infty} nr^n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+t)^n} = 0$ //

(3) $S_n = 1-2x+3x^2-4x^3+\cdots+(-1)^{n-1}nx^{n-1}$

$-)\ \ -xS_n = \quad -x+2x^2-3x^3+\cdots+(-1)^{n-1}(n-1)x^{n-1}+(-1)^n n x^n$

$(1+x)S_n = 1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^{n-1}x^{n-1}-(-1)^n n x^n$

$=\frac{1-(-x)^n}{1+x}-(-1)^n nx^n$

$\therefore S_n = \frac{1-(-x)^n}{(1+x)^2}-\frac{(-1)^n nx^n}{1+x}$ //

(4) $A(x)=\frac{1}{(1+x)^2}$

$\lim_{x\to 1-0} A(x)=\frac{1}{4}$ //

〈point〉

1. 等差×等比数列の和の極限

8

I.(1) $\sum_{n=m}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=m}^{N}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$= \frac{1}{m}-\frac{1}{N+1}$

$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=m}^{N} \frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{m}$ //

(2) $\frac{1}{n(n+1)}<\frac{1}{n^2}<\frac{1}{(n-1)n}$

$n=2,3,\cdots$ としてすべて足して

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} < \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2} < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$

$\therefore \frac{1}{2} < \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}<1$ □

II.(1) $S_n = \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$ とおくと

$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$ //

(2) $T_n = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\cdots$ とおくと

$T_{2m-1} = 1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cdots-\cancel{\frac{1}{m}}+\cancel{\frac{1}{m}} = 1$

$T_{2m}=1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cdots-\cancel{\frac{1}{m}}+\cancel{\frac{1}{m}}-\frac{1}{m+1}$

$= 1-\frac{1}{m+1}$

$n\to\infty$ のとき $m\to\infty$ より

$\lim_{n\to\infty} T_{2m-1}=\lim_{n\to\infty} T_{2m}=1$ であるから $\{T_n\}$ は収束し

$\lim_{n\to\infty} T_n = 1$ //

(3) $U_n = \frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\cdots\cdots$ とおく

$U_{2m-1} = \frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\cdots-\frac{m}{m+1}+\frac{m}{m+1}=\frac{1}{2}$

$U_{2m}=\frac{1}{2}-\cdots\cdots-\cancel{\frac{m}{m+1}}+\cancel{\frac{m}{m+1}}-\frac{m+1}{m+2}=\frac{1}{2}-\frac{m+1}{m+2}$

$n\to\infty$ のとき $m\to\infty$ より

$\lim_{n\to\infty} U_{2m-1}=\frac{1}{2}$

$\lim_{n\to\infty} U_{2m}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}-\frac{m+1}{m+2}\right)=-\frac{1}{2}$

$\lim_{n\to\infty} U_{2m-1}\neq\lim_{n\to\infty} U_{2m}$ であるから $\{U_n\}$ は発散する //

9

(1) $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおく

級数が収束するから $\lim_{n\to\infty} S_n=\lim_{n\to\infty} S_{n-1}=\alpha$ (定数) とする

このとき

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})$$
$$=\alpha-\alpha=0 \text{ //.}$$

命題の対偶は

$\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0 \to$ 級数は発散する

(2) (i) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N} a_n$$
$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}$$
$$=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right)$$
$$=\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2N+1}\right)=\frac{1}{2} \text{ //}$$

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_n=1$ であるから

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する。

注.

逆命題「$\lim_{n\to\infty} a_n=0 \to$ 級数は収束する」は

偽である

反例

・ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ は $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ で

あるが発散する

・ $a_n=\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ は $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ であるが

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は発散する