

発展問題演習 19. 微分法

□

d) $x=0, y=0 \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$f(0)=2f(0) \therefore f(0)=0$

e)
$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(h) + 2axh - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + 2x \right\} \\ &= f'(0) + 2x \\ &= 2x + 1 \end{aligned}$$

b) $f(x) = x^2 + x + C$ (C: 積分定数)

$f(0)=0$ より

$C=0$

$\therefore$

$f(x) = x^2 + x$

<point>

1. 導関数の定義.

□

d) $f(x) = x^3$ とおく

$f'(x) = 3x^2$

上の方程式を以て

$y - f(x) = f'(x)(x-a)$

$y - a^3 = 3a^2(x-a)$

$\therefore y = 3a^2x - 2a^3$

$x^3 = 3a^2x - 2a^3$ として

$x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0$

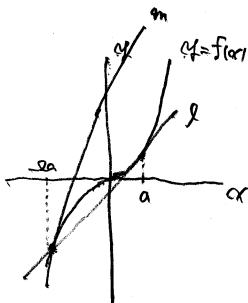
$(x-a)^2(x+2a) = 0 \therefore x = -2a$

上の方程式を以て

$y - f(-2a) = f'(-2a)(x+2a)$

$y + 8a^3 = 12a^2(x+2a)$

$\therefore y = 12a^2x + 16a^3$



$\therefore$

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \left| \frac{12a^2 - 3a^2}{1 + 12a^2 \cdot 3a^2} \right| \\ &= \frac{9a^2}{1 + 36a^4} \end{aligned}$$

e) $\tan \theta = \frac{9}{36a^4 + \frac{1}{a^4}}$

相加・相乗平均より

$36a^4 + \frac{1}{a^4} \geq 2\sqrt{36a^4 \cdot \frac{1}{a^4}} = 12$

等号が成り立つのは $36a^4 = \frac{1}{a^4} \therefore a = \sqrt[4]{\frac{1}{36}}$ のとき

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ であり、この範囲では

$\tan \theta > 0$. $\tan \theta$ は単調増加関数であるから

θ は最大となる $\therefore \tan \theta$ は最大となる $\therefore a$ とする

$\tan \theta = \frac{9}{4}$. $a = \frac{\sqrt[4]{6}}{6}$

<point>

1. 接線の方程式.

□

II. $y = f(x) = x^2 + 1$ とおく

$f'(x) = 2x$

$y = f(x)$ の $x = s$ (2点) における接線

$y - f(s) = f'(s)(x-s)$

$y - (s^2 + 1) = 2s(x-s)$

$\therefore y = 2sx - s^2 + 1$

したがって $y = -(x-t)^2 + t$ と接するときは

$-(x-t)^2 + t = 2sx - s^2 + 1$

$x^2 + 2(s-t)x - s^2 + t + 1 = 0$

x の重根 $\exists$ である $\therefore$ $\Delta = 0$ から

判別式 $\Delta = 0$ とし、 $\Delta = 0$ より

$\frac{\Delta}{4} = (s-t)^2 - (-s^2 + t + 1) = 0$

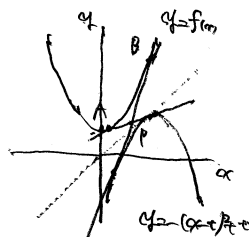
$2s^2 - 2st + t - 1 = 0$

$\therefore a, \beta$ があり、 α, β とおける。

$\therefore$

$l_1: y = 2\alpha x - \alpha^2 + 1$

$l_2: y = 2\beta x - \beta^2 + 1$



$$2\alpha\alpha - \alpha^2 = 2\beta\alpha - \beta^2 \quad \text{とて}$$

$$2(\alpha - \beta)\alpha = \alpha^2 - \beta^2$$

$$\therefore \alpha = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\alpha = 2\alpha \cdot \frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha^2 = \alpha(\beta + 1)$$

よ、

$$P\left(\frac{\alpha + \beta}{2}, \alpha(\beta + 1)\right)$$

$$\textcircled{A} \vec{PA} = \left(\frac{\alpha - \frac{\alpha + \beta}{2}}{\alpha^2 + 1 - \alpha(\beta + 1)}\right) = \left(\frac{\frac{\alpha - \beta}{2}}{\alpha(\alpha - \beta)}\right)$$

$$\vec{PB} = \left(\frac{\beta - \frac{\alpha + \beta}{2}}{\beta^2 + 1 - \alpha(\beta + 1)}\right) = \left(\frac{\frac{\beta - \alpha}{2}}{\beta(\beta - \alpha)}\right) \quad \text{より}$$

$$S_{\triangle P} = \frac{1}{2} \left| \frac{\alpha - \beta}{2} \beta(\beta - \alpha) - \frac{\beta - \alpha}{2} \alpha(\alpha - \beta) \right|$$

$$= \frac{1}{4} |\beta - \alpha|^3$$

$\alpha < \beta$ とて

$$\beta - \alpha = \frac{t + \sqrt{t^2 - 2(t-1)}}{2} - \frac{t - \sqrt{t^2 - 2(t-1)}}{2}$$

$$= \sqrt{t^2 - 2t + 2}$$

より

$$S(t) = \frac{1}{4} (\sqrt{t^2 - 2t + 2})^3$$

$$\textcircled{A} S(t) = \frac{1}{4} (\sqrt{(t-1)^2 + 1})^3$$

$$t = 1 \text{ において } S(1) = \frac{1}{4}$$

$$\text{したがって } S(t) = \frac{1}{4}$$

[5]

$$\text{I. } f(x) = x^3 + 3ax^2 + 3bx$$

$$f'(x) = 3x^2 + 6ax + 3b = 3(x^2 + 2ax + b)$$

$f(x)$ の極小値、極大値を求めよ

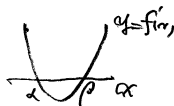
$f'(x) = 0$ の解の2つを α, β とする。

判別式 $D \geq 0$ とし $D > 0$ より

$$\frac{D}{4} = a^2 - b > 0 \quad \therefore b < a^2$$

よって $f'(x) = 0$ の2解 α, β がある

x	α	β
$f''(x)$	+	-
$f(x)$	極大	極小



極大値、極小値を求めよ

$$f(\alpha)f(\beta) < 0$$

よって

$$\alpha^3 + 3a\alpha^2 + 3b\alpha = (\alpha^2 + 2a\alpha + b)(\alpha + a)$$

$$+ 2(b - a^2)\alpha - ab$$

より

$$f(\alpha)f(\beta) = f(\alpha)(b - a^2)\alpha - ab \cdot f(\beta) = 4(b - a^2)^2\alpha\beta - 2ab(b - a^2)(\alpha + \beta) + a^3b^2 < 0$$

解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = -2a, \quad \alpha\beta = b \quad \text{より}$$

$$4(b - a^2)^2b - 2ab(b - a^2)(-2a) + a^3b^2 < 0$$

$$b^2(4b - 9a^2) < 0$$

$$\therefore b < \frac{9}{4}a^2$$

また極大値と極小値の和を求めよ

$$f(\alpha) + f(\beta) < 0$$

$$2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) < 0$$

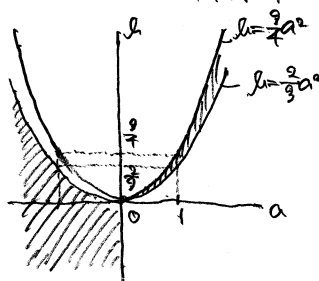
$$f(-a) < 0$$

$$2a^3 + 9ab < 0$$

$$a(2a^2 + 3b) < 0$$

$$\therefore \begin{cases} a > 0, & b < -\frac{2}{3}a^2 \\ b > \frac{2}{3}a^2, & a < 0 \end{cases}$$

本問3問(1)は、2問の重複部分



$$\textcircled{A} f(\alpha)f(\beta) = -1 \quad \text{より}$$

$$b^2(4b - 9a^2) = -1 \quad \dots \textcircled{1}$$

極大値と極小値の和を求めよ

$$a(2a^2 + 3b) = 0 \quad \dots \textcircled{2}$$

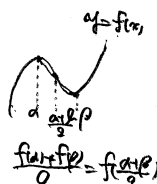
②より $a = 0$ または $a^2 = -\frac{3}{2}b$

$$a = 0 \text{ とき } 4b^2 = -1 \quad \therefore b = -\frac{1}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$a^2 = -\frac{3}{2}b \text{ とき } -\frac{1}{2}b^2 = -1 \quad \therefore b = \frac{\sqrt{4}}{2}$$

よって

$$(a, b) = (0, -\frac{\sqrt{2}}{2}), (\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{4}}{2})$$



$$\begin{aligned} \text{II } f(x) &= (9x^2 - 4)\left(x - a + \frac{1}{a}\right) \\ &= 9x^3 + \left(-a + \frac{1}{a}\right)x^2 - 4x - 4\left(-a + \frac{1}{a}\right) \\ f'(x) &= 9x^2 + 6\left(-a + \frac{1}{a}\right)x - 4 \\ f'(x) &= 0 \text{ とし } \\ 9x^2 + 6\left(-a + \frac{1}{a}\right)x - 4 &= 0 \end{aligned}$$

① 4判式 $x \in \mathbb{R}$ とする

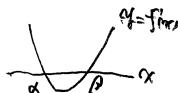
$$\begin{aligned} \frac{b}{4} &= 9\left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 36 \\ &= 9a^2 + \frac{9}{a^2} + 18 > 0 \end{aligned}$$

∴ $f'(x) = 0$ は $a \neq 0$ と仮定して2つの実数根

をもつことがわかる

これより α, β とする ($\alpha < \beta$)

x	α	β
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	↗	↘



∴ $f(x)$ は $x = \alpha$ で極小値、 $x = \beta$ で極大値をとる

$$\begin{aligned} f(\alpha) - f(\beta) &= \int_{\beta}^{\alpha} f'(x) dx \\ &= \int_{\beta}^{\alpha} \left(9x^2 + 6\left(-a + \frac{1}{a}\right)x - 4\right) dx \\ &= -9 \int_{\alpha}^{\beta} (x - a)\left(x - \frac{1}{a}\right) dx \\ &= -\frac{9}{2}(\beta - \alpha)^2 \\ \beta - \alpha &= \frac{9(a - \frac{1}{a}) + \sqrt{9(a - \frac{1}{a})^2 + 36}}{9} - \frac{3(a - \frac{1}{a}) - \sqrt{9(a - \frac{1}{a})^2 + 36}}{9} \\ &= \frac{2}{9} \left| a + \frac{1}{a} \right| \quad \text{∴} \\ &= \frac{4}{9} \left\{ \left(a + \frac{1}{a} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} \quad \frac{92}{9} \\ &= \frac{4}{9} \left(a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{4}{9} \cdot 4^{\frac{1}{2}} \quad (\text{相加乗平均}) \end{aligned}$$

等号成立は $a^2 = \frac{1}{a^2}$ とおき $a = \pm 1$ とする

∴ 極大値と極小値の差の最小値は $a = \pm 1$ のとき

<point>

1. 極値の和 → 3次関数の対称性を利用して

$$f(\alpha) + f(\beta) = 2f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)$$

2. 差 → 定積分を利用して

$$f(\alpha) - f(\beta) = \int_{\beta}^{\alpha} f'(x) dx \quad (f'(\alpha) > f'(\beta))$$

[6]

I. $f(-x) = -f(x)$ より

$y = f(x)$ は奇関数である (原点对称)

$y = |f(x)|$ は偶関数である (y軸対称)

$x \geq 0$ と仮定する

$$f(x) = 9ax - 9a$$

i) $a \leq 0$ のとき

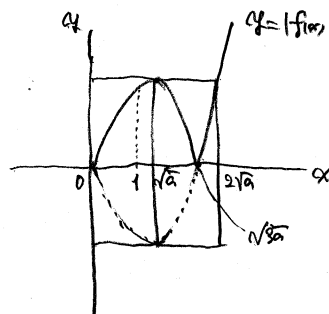
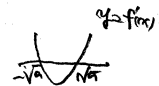
$f(x) \geq 0$ ∴ $f(x)$ は単調増加

$x = 1$ で最大値 $1 - 9a$

ii) $a > 0$ のとき

$$f(x) = 0 \text{ とする } x = \sqrt{a}$$

x	0	$\sqrt{a}$
$f'(x)$	-	+
$f(x)$	↘	↗



① $\sqrt{a} > 1$ のとき

$x = 1$ で最大値 $|f(1)| = 9a - 1$

② $1 \leq \sqrt{a} \leq 2\sqrt{a}$ とおき $\frac{1}{4} \leq a \leq 1$ とする

$x = \sqrt{a}$ で最大値 $|f(\sqrt{a})| = 2a\sqrt{a}$

③ $2\sqrt{a} < 1$ とおき $0 < a < \frac{1}{4}$ とする

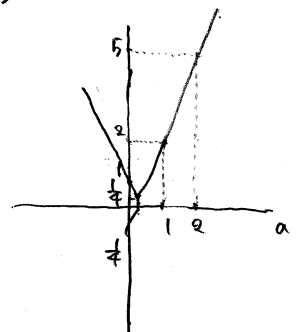
$x = 1$ で最大値 $|f(1)| = 1 - 9a$

④. ii) より

$$M = \begin{cases} 1 - 9a & (a < \frac{1}{4}) \\ 2a\sqrt{a} & (\frac{1}{4} \leq a \leq 1) \\ 9a - 1 & (a > 1) \end{cases}$$

∴ $a = \frac{1}{4}$ のとき

M の最小値は $\frac{1}{4}$



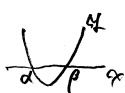
7

II. ① $f(x) = x^2 - 3x - 4$

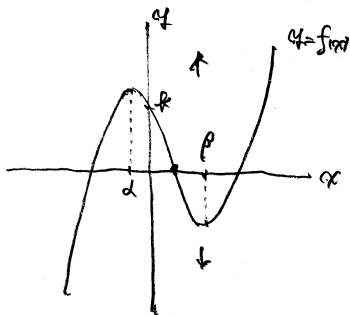
$f(x) = 3x^2 - 6x - 4$

$f(x) = 0$ とすると $x = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{3} = 1 \pm \frac{\sqrt{21}}{3}$

x	$ x $	$ f $
$f(x) = +$	0	-
$f(x) = -$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$



②



$f(x) = 0$ の解は $y = f(x)$ と x 軸との交点の x の値に
なり、

$f(x) = 0$ の 3 つの解 (すべて $x > 0$) とし、 $0 < x_1 < x_2 < x_3$
($x_1 < x_2 < x_3$) とすると

$$1 - \frac{\sqrt{21}}{3} < x_1 < 1 + \frac{\sqrt{21}}{3}$$

$$x_1 = 0, 1, 2$$

③ $x_1 = 0$ とし

$x_1 = 0$ とし

$k = 0 \leq f(x) = 0$ となる x の範囲

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$x(x^2 - 3x - 4) = 0$

$x(x+1)(x-4) = 0 \therefore x = -1, 0, 4$

④ $x_1 = 1$ とし

$k = 6$

$$\begin{array}{r|rrrr} 4 & 1 & -3 & -4 & 6 \\ & & 1 & -2 & -6 \\ \hline & 1 & -2 & -6 & 0 \end{array}$$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$(x-1)(x^2 - 2x - 6) = 0 \therefore x = 1, 1 \pm \sqrt{7}$

⑤ $x_1 = 2$ とし

$k = 12$

$x^2 - 3x - 4 = 0$

$x^2(x-2) - 4(x-2) = 0$

$(x+2)(x-2)(x-2) = 0 \therefore x = -2, 2, 3$

⑥ $x_1 = 4$ とし

$k = 0$, 解は $x = -1, 0, 4$

$k = 12$, " $-2, 2, 3$

8

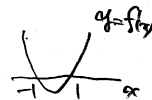
II. ① $f(x) = a \in \mathbb{R}$ に対して

$y = f(x)$ と $y = a$ の交点の x の値に

$f(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$

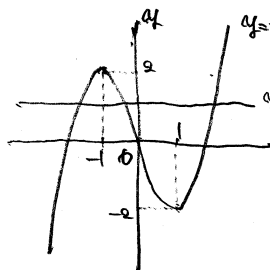
$f(x) = 0$ とすると $x = \pm 1$

x	$ x $	$ f $
$f(x) = +$	0	-
$f(x) = -$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$



$x = -1$ とすると $f(-1) = 2$

$x = 1$ とすると $f(1) = -2$



② $y = f(x)$ と $y = a$ の交点の x の値に
 $a < -2$ と $a > 2$ のときは 1 個
 $a = \pm 2$ のときは 2 個
 $-2 < a < 2$ のときは 3 個

③ $g(x) = 0$

$f(x)^2 - 3f(x) = 0$

$t = f(x)$ とおくと

$t^2 - 3t = 0$

④ $t = 0$ とし

$x = 0$ とし

また $t = 3$ とし $f(x) = 3$ とすると $x = 1, 2$

⑤ $t = 0$ とし

$g(x) = 0$ とし

⑥ $h(x) = 0$

$f(x)^2 - 3g(x) = 0$

$u = g(x)$ とおくと

$u^2 - 3u = 0$

⑦ $u = 0$ とし

$h(x) = 0$ とし

⑧ $u = 3$ とし

$h(x) = 0$ とし

⑨ $h(x) = 0$ とし

$h(x) = 0$ とし

