64 [2013 東京電機大]

ある直方体の縦の長さ x，横の長さ y，高さ z が $4x+y=12$，$x+y+z=18$ を満たすとする。この直方体の体積を V とするとき，次の問いに答えよ。

(1) y と z をそれぞれ x で表し，更に，x のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) V を x で表せ。

(3) V が最大となるときの x の値を求めよ。

(1) $4x+y=12$ …①

$x+y+z=18$ …②

①より $y=12-4x$

②より

$12-3x+z=18$

$\therefore z=3x+6$

$x, y, z>0$ より

$$\begin{cases} x>0 \\ 12-4x>0 & \therefore x<3 \\ 3x+6>0 & \therefore x>-2 \end{cases} \qquad \therefore 0<x<3$$

(2) $V=xyz$

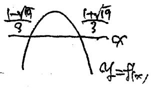
$=x(12-4x)(3x+6)$

$=-12x(x-3)(x+2)=f(x)$ とおく

(3) $f(x)=-12(x^3-x^2-6x)$

$f'(x)=-12(3x^2-2x-6)$

$f'(x)=0$ とすると $x=\dfrac{1\pm\sqrt{19}}{3}$



x	0		$\frac{1+\sqrt{19}}{3}$		3
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$		↗	極大	↘	

$x=\dfrac{1+\sqrt{19}}{3}$ のとき極大かつ最大

65 [1997 明治大]

(1) 縦と横の長さの和が一定である長方形のうちでは，正方形が面積最大であることを示せ.

(2) 上の結果を参考にして，縦の長さ，横の長さ，高さの和が一定である直方体のうちでは，立方体が体積最大であることを示せ.

(1) 縦の長さを x，横の長さを y とする

題意より $x+y=k$（定数）　$\therefore y=k-x$

$x, \underset{k-x}{y}>0$ より $0<x<k$

面積 $xy=x(k-x)$

$=-x^2+kx$

$=-\left(x-\dfrac{k}{2}\right)^2+\dfrac{k^2}{4}$

$x=y=\dfrac{k}{2}$ すなわち正方形のとき xy は最大となる ▯

[別解] 相加相乗

(2) 縦，横，高さをそれぞれ x, y, z とする

題意より $x+y+z=l$（l：一定）　$\therefore x+y=l-z$

z を固定して (1) より $x=y$ のとき最大で　$0<z<l$

最大値 $xy=\dfrac{(l-z)^2}{4}$

このとき $xyz=\dfrac{z(z-l)^2}{4}$

$f(z)=z(z-l)^2$ とおく

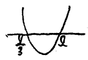
$=z^3-2lz^2+l^2z$

$f'(z)=3z^2-4lz+l^2$

$=(z-l)(3z-l)$

$f'(z)=0$ とすると $z=\dfrac{l}{3}, l$

z	0		$\frac{l}{3}$		l
$f'(z)$		+	0	−	0
$f(z)$		↗	極大	↘	



$z=\dfrac{l}{3}$ のとき $f(z)$ は最大

$x=y=z=\dfrac{l}{3}$ すなわち立方体のとき xyz は最大となる

[別解]

$x, y, z>0$ であるから

相加相乗平均より

$$\frac{x+y+z}{3}\geqq\sqrt[3]{xyz}$$

$$xyz\leqq\frac{l^3}{27}$$

等号成立は $x=y=z$ のとき

$x=y=z$ すなわち立方体のとき等号が成立し

このとき最大値をとる

66 [2010 東京大]

3辺の長さが a と b と c の直方体を，長さが b の1辺を回転軸として 90° 回転させるとき，直方体が通過する点全体が作る立体を V とする。

(1) V の体積を a，b，c を用いて表せ。

(2) $a+b+c=1$ のとき，V の体積のとりうる値の範囲を求めよ。

67 [2007 埼玉大]

(1) 3次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ の解が α, β, γ であるとき，3つの係数 a, b, c を α, β, γ で表せ。

(2) 次の2条件 (i) 縦，横，高さを加えると 9 m になる。
(ii) 表面積は 48 m^2 である。
を満たす直方体の体積のうちで最大のものを求めよ。

(1) 解と係数の関係より

$\alpha+\beta+\gamma=-a$　　$\therefore a=-(\alpha+\beta+\gamma)$

$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$　　$b=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$

$\alpha\beta\gamma=-c$　　$c=-\alpha\beta\gamma$

(2) 直方体の3辺の長さを α, β, γ とし、体積を V とすると

$\alpha+\beta+\gamma=9$

$2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=48$　　$\therefore \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=24$

$\alpha\beta\gamma=V$

α, β, γ は

$x^3-9x^2+24x-V=0$ …①

の3つの解である

①が3つの実数解をもつとき、実数 α, β, γ が存在する
(直方体が存在する)

$x^3-9x^2+24x=V$

の実数解は $y=x^3-9x^2+24x$ と

$y=V$ の交点の x 座標に等しいから

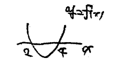
$f(x)=x^3-9x^2+24x$ とおくと

$f'(x)=3x^2-18x+24$

$=3(x-2)(x-4)$

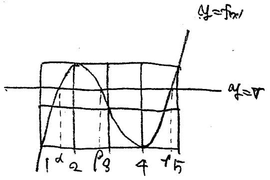
$f'(x)=0$ とすると $x=2, 4$

x		2		4	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗



$x=2$ で極大　極大値 $f(2)=20$

$x=4$ 〃 小　〃 $f(4)=16$



グラフより $16 \leqq V \leqq 20$

直方体のうち体積が最大となるのは
縦・横・高さの長さが
2, 2, 5
のもの

68 [2016 同志社大]

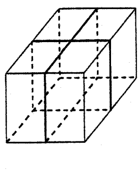
(1) 長方形Rの縦の長さを x，横の長さを y とする。$x+y=2$ であるとき，長方形Rの面積を最大にする x, y の値を求めよ。

(2) 直方体Cの縦の長さを x，横の長さを y，高さを z とする。3辺の和について $x+y+z=12$ であり，かつ表面積について $2(xy+yz+zx)=72$ であるような直方体Cが存在するための x の値の範囲を求めよ。

(3) 直方体Cの縦の長さを x，横の長さを y，高さを z とする。3辺の和について $x+y+z=12$ であり，かつ表面積について $2(xy+yz+zx)=72$ であるとき，直方体Cの体積を最大にする x, y, z の値をそれぞれ求めよ。

69 [2001 東京学芸大]

図のように直方体の各辺に平行に2本のひもがかけてある．ひもの長さの和は16で，直方体の表面積は16である．このような直方体の体積 V の最大値を求めよ．



70 [2020 早稲田大]

縦 x cm，横 y cm，高さ z cm の直方体がある。この直方体の対角線の長さは 3 cm，全表面積は 16 cm^2 である。

(1) $x+y+z$ の値は $\boxed{}$ である。

(2) この直方体の最小の体積は $\boxed{}$ cm^3 である。

(3) この直方体が最大の体積をもつとき，最も長い辺の長さは $\boxed{}$ cm である。

(1) 題意より

$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=9 \\ 2(xy+yz+zx)=16 \end{cases}$　　$\therefore xy+yz+zx=8$

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ より

$(x+y+z)^2=25$

$x, y, z>0$ であるから $x+y+z>0$ より

$x+y+z=\boxed{5}$

(2) 直方体の体積を V とおくと $V=xyz$、

x, y, z は

$t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+zx)t-xyz=0$

$t^3-5t^2+8t-V=0$ …①

の3つの解である

①が3つの実数解をもつとき、実数 x, y, z が存在する

$t^3-5t^2+8t=V$

の実数解は $y=t^3-5t^2+8t$ と

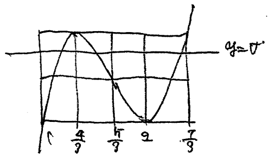
$y=V$ の交点の t 座標に等しいから

$f(t)=t^3-5t^2+8t$ とおくと

$f'(t)=3t^2-10t+8$　　$\begin{matrix}1 & -2\\ 3 & -4\end{matrix}$

$=(t-2)(3t-4)$

$f'(t)=0$ とすると $t=\frac{4}{3}, 2$



グラフより V が最小となるとき

$V=f(2)=8-20+16=\boxed{4}$

V が最大となるとき　最も長い辺は $\boxed{\frac{7}{3}}$

71 [京都大]

xyz 空間で，原点Oを中心とする半径 $\sqrt{6}$ の球面 S と3点 $(4, 0, 0)$, $(0, 4, 0)$, $(0, 0, 4)$ を通る平面 α が共有点をもつことを示し，点 (x, y, z) がその共有点全体を動くとき，積 xyz がとり得る値の範囲を求めよ．

72 [南山大]

実数 x, y が $x^2+y^2=5$ を満足するように変わるとき，xy の最大値は $\square$ である．また，x, y, z が $xy+yz+zx=10$ を満足するように変わるとき，$x^2+y^2+z^2$ の最小値は $\square$ である．

$(x-y)^2 \geqq 0$ より

$x^2+y^2 \geqq 2xy$

$\therefore xy \leqq \frac{1}{2}(x^2+y^2)=\frac{5}{2}$

等号成立は $x=y$ のときで

$2x^2=5$　$\therefore x=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$

このとき xy は最大値をとり　最大値は $\boxed{\frac{5}{2}}$

$x^2+y^2+z^2 \geqq xy+yz+zx$ より

$x^2+y^2+z^2 \geqq 10$

等号成立は $x=y=z$ のときで

$3x^2=10$　$\therefore x=\pm\frac{\sqrt{30}}{3}$

このとき $x^2+y^2+z^2$ は最小値をとり　最小値は $\boxed{10}$

73 [2008 公立はこだて未来大]

x，y，z を実数とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$x^2+y^2+z^2 \geqq xy+yz+zx$ を示し，等号が成り立つときの x，y，z の条件を求めよ。

(2)　$x+y+z=1$ のとき，$xy+yz+zx \leqq \frac{1}{3}$ を示し，等号が成り立つときの x，y，z の値をすべて求めよ。

74 [京都産業大]

(1) 不等式 $(a^2+b^2+c^2)(p^2+q^2+r^2) \geqq (ap+bq+cr)^2$ を示せ．ただし，a, b, c, p, q, r は実数とする．

(2) 実数 p, q, r が $p^2+q^2+r^2=6$ を満たしながら動くとき，$p+q+2r$ の最大値，最小値を求めよ．

(3) 実数 p, q, r が $p+q+r=8$ を満たしながら動くとき $p^2+q^2+4r^2+2q$ の最小値と，そのときの p, q, r の値を求めよ．

(1) $\vec{a}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}$ とおく

$|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leqq |\vec{a}||\vec{b}|$ より

$(\vec{a}\cdot\vec{b})^2 \leqq |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2$

$(ap+bq+cr)^2 \leqq (a^2+b^2+c^2)(p^2+q^2+r^2)$ □

等号成立は $\vec{a} /\!/ \vec{b}$ のとき

(2) (1) において $a=1, b=1, c=2$ として

$6 \cdot 6 \geqq (p+q+2r)^2$

$\therefore -6 \leqq p+q+2r \leqq 6$

等号成立は $p=q=\frac{r}{2}$ のときで

$\frac{r^2}{4}+\frac{r^2}{4}+r^2=6$　$\therefore r=\pm 2$

$r^2=4$

$\begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix}=k\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$p=k, q=k, r=2k$

$\therefore (p, q, r)=(1, 1, 2), (-1, -1, -2)$

よって

最大値 6，最小値 -6

(3) $p^2+q^2+4r^2+2q=p^2+(q+1)^2+4r^2-1$

(1) の不等式において $a=1$, $b=1$, $c=\frac{1}{2}$, $p=p$, $q=q+1$, $r=2r$ とすると

$\frac{9}{4}\{p^2+(q+1)^2+4r^2\} \geqq (p+q+r+1)^2$

$p^2+(q+1)^2+4r^2 \geqq 36$

$\therefore p^2+(q+1)^2+4r^2-1 \geqq 35$

等号成立は

$p=q+1=4r$

すなわち

$4r+(4r-1)+r=8$

$\therefore r=1, p=4, q=3$ のとき

このとき最小値をとり

最小値 35

75 [(1) 小樽商科大]

(1) $x^2+y^2+z^2=1$ のとき，$x+2y+3z$ の最大値とそのときの x, y, z の値を求めよ

(2) x, y, z, w が実数で，$x^2+y^2+z^2+w^2=1$ のとき，$x+2y+3z+4w$ の最大値と最小値を求めよ．

76 [慶応義塾大]

(1) 実数 x, y が $x+y=1$ を満たすならば，x^2+y^2 の最小値は $\square$ である．

(2) 実数 x, y, z が $x+2y+3z=1$ を満たすならば，$x^2+y^2+z^2$ は $x=\square$, $y=\square$, $z=\square$ のとき，最小値 $\square$ をとる．

77 [Ⅰ. 2014 早稲田大　Ⅱ. 横浜国立大]

Ⅰ. 実数 a, b, c が $a+b+c=8$, $a^2+b^2+c^2=32$ を満たすとき，実数 c の最大値は $\dfrac{ア\boxed{}}{イ\boxed{}}$ である。

Ⅱ. (1) 任意の実数 x, y, z について，$(x+y+z)^2 \leqq 3(x^2+y^2+z^2)$ が成り立つことを証明せよ．
(2) 実数 x, y, z, t が $x+y+z+t=6, x^2+y^2+z^2+t^2=12$ をみたすとき，t の最大値と最小値を求めよ．

Ⅰ. $a+b+c=8$, $a^2+b^2+c^2=32$ より

$$\begin{cases} a+b=8-c \\ a^2+b^2=32-c^2 \end{cases}$$

シュワルツの不等式

$(ax+by)^2 \leqq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$

において $x=y=1$ として

$(a+b)^2 \leqq 2(a^2+b^2)$

等号成立は $a=b$ のとき

$(8-c)^2 \leqq 2(32-c^2)$

$3c^2-16c \leqq 0$

$c(3c-16) \leqq 0$　$\therefore 0 \leqq c \leqq \frac{16}{3}$

c の最大値は $\frac{16}{3}$　$(a=\frac{4}{3}\ b=\frac{4}{3})$

Ⅱ. (1) シュワルツの不等式

$(ax+by+cz)^2 \leqq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$

において $a=b=c=1$ として

$(x+y+z)^2 \leqq 3(x^2+y^2+z^2)$

等号成立は $x=y=z$ のとき は

(2) $x+y+z+t=6$, $x^2+y^2+z^2+t^2=12$ より

$$\begin{cases} x+y+z=6-t \\ x^2+y^2+z^2=12-t^2 \end{cases}$$

(1)より

$(6-t)^2 \leqq 3(12-t^2)$

$4t^2-12t \leqq 0$

$t(t-3) \leqq 0$　$\therefore 0 \leqq t \leqq 3$

t の最大値は 3　$(x=y=z=1)$
　小　0　$(x=y=z=2)$

78 [(1) 東京薬科大]

(1) 実数 a, b, c, d は2つの等式 $a+b+c+d=7, a^2+b^2+c^2+d^2=13$ をみたしている．このとき，d のとりうる値の範囲を求めよ．
(2) 実数 x, y, z, u, v が $x+y+z+u+v=8, x^2+y^2+z^2+u^2+v^2=16$ を満たすとき，x のとりうる値の最大値を求めよ．

79 [Ⅱ. 1996 東北学院大]

Ⅰ. すべての正の実数 x, y に対して $(x+y)^2 \leqq k(x^2+y^2)$ が成り立つような k の最小値を求めよ．

Ⅱ. $x \geqq 0, y \geqq 0$ とし，不等式 $c(x+y) \geqq 2\sqrt{xy}$ ……① を考える．ただし，c は正の定数である．
(1) $c \geqq 1$ のとき，①は常に成り立つことを示せ．
(2) ①が常に成り立てば，$c \geqq 1$ であることを示せ．
(3) $\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq k\sqrt{x+y}$ が常に成り立つような正の定数 k のうちで，最小なものはいくらか．

Ⅰ. シュワルツの不等式

$(ax+by)^2 \leqq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$

において $a=b=1$ として

$(x+y)^2 \leqq 2(x^2+y^2)$

等号成立は $x=y$ のとき

$x^2+y^2>0$ であるから $k \geqq 2$　よって k の最小値は 2

【別解】

$(x+y)^2 \leqq k(x^2+y^2)$

両辺 $y^2(>0)$ で割って

$\left(\frac{x}{y}\right)^2+2\left(\frac{x}{y}\right)+1 \leqq k\left\{\left(\frac{x}{y}\right)^2+1\right\}$

$t=\frac{x}{y}$ とおくと $t>0$

$t^2+2t+1 \leqq kt^2+k$

$(k-1)t^2-2t+k-1 \geqq 0$

が $t>0$ で常に成り立てばよい

⋮

Ⅱ. (1) $c(x+y)-2\sqrt{xy}$

$=(c-1)(x+y)+(\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \geqq 0$

より成り立つ

(2) $\boxed{対偶}$

$c<1 \rightarrow$ ①が成り立たない x, y が存在する

$x=y=1$ とすると

$2c \geqq 2$

$c<1$ より成り立たない

よって元の命題は真である

(3) $\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq k\sqrt{x+y}$

両辺とも正であるから両辺2乗して

$x+y+2\sqrt{xy} \leqq k^2(x+y)$

$2\sqrt{xy} \leqq (k^2-1)(x+y)$

(1)より

$k^2-1 \geqq 1$　$\therefore k \geqq \sqrt{2}$

k の最小値は $\sqrt{2}$

【別解】

シュワルツの不等式

$(ax+by)^2 \leqq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$

において $a=1, b=1, x=\sqrt{x}, y=\sqrt{y}$ として

$(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 \leqq 2(x+y)$

$\therefore 0 \leqq \sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq \sqrt{2}\sqrt{x+y}$

$\sqrt{x+y}>0$ より $k \geqq \sqrt{2}$

k の最小値は $\sqrt{2}$

80 [(1) 近畿大　(2) 1997 お茶の水女子大　(3) 東京大]

(1) 正の数 x, y に対して，つねに $(x+y)^3 \leqq k(x^3+y^3)$ が成り立つような k の最小値を求めよ．
(2) どんな正の数 x, y に対しても不等式 $(x+y)^4 \leqq c^3(x^4+y^4)$ が成り立つような c の値の範囲を求めよ．
(3) すべての正の実数 x, y に対し $\sqrt{x}+\sqrt{y} \leqq k\sqrt{2x+y}$ が成り立つような実数 k の最小値を求めよ．