

18 [2015 県立広島大]

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = -1, a_{n+1} = \frac{5a_n + 9}{-a_n + 11} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

- (1) a_2, a_3, a_4 を求めよ。
- (2) 一般項 a_n を推測し、その結果を数学的帰納法によって証明せよ。
- (3) $a_n < 3$ を示せ。
- (4) $a_n < a_{n+1}$ を示せ。
- (5) a_n が自然数となる n をすべて求めよ。

$a_2 = \frac{5a_1 + 9}{-a_1 + 11} = \frac{1}{3}$
 $a_3 = \frac{5a_2 + 9}{-a_2 + 11} = 1$
 $a_4 = \frac{5a_3 + 9}{-a_3 + 11} = \frac{7}{5}$

$a_n = \frac{9n-5}{n+1}$ と推測して
 $a_{n+1} = \frac{9(n+1)-5}{(n+1)+1} = \frac{9n+4}{n+2}$
 $a_n < a_{n+1}$ を示す
 $\frac{9n-5}{n+1} < \frac{9n+4}{n+2}$
 $9n^2 - 5n - 9n - 4 < 9n^2 + 9n + 4 - 9n^2 - 5n - 4$
 $-4 < 9n - 4$
 $0 < 9n$
 $n > 0$

$a_n < 3$ を示す
 $\frac{9n-5}{n+1} < 3$
 $9n-5 < 3n+3$
 $6n < 8$
 $n < \frac{4}{3}$
 $n=1, 2$

a_n が自然数となる n をすべて求めよ。
 $\frac{9n-5}{n+1} = k$
 $9n-5 = k(n+1)$
 $9n-5 = kn+k$
 $9n-5-kn-k = 0$
 $(9-k)n - 5-k = 0$
 $(9-k)n = 5+k$
 $n = \frac{5+k}{9-k}$
 n が自然数となる k を求めよ。
 $k=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$
 $n = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$
 $n = \frac{7}{6}$
 $n = \frac{8}{5}$
 $n = \frac{9}{4}$
 $n = \frac{10}{3}$
 $n = \frac{11}{2}$
 $n = \frac{12}{1} = 12$

22 [2008 青山学院大]

関数 $f(x) = x^2 - 2$ を用いて数列を次のように定める。まず、 $a_0 = 2$ として $f(x)$ の $x = a_0$ における接線が x 軸と交わる点の x 座標を a_1 とする。このとき $a_1 = \frac{7}{3}$ である。以下同様にして、 $x = a_n$ における $f(x)$ の接線が x 軸と交わる点の x 座標を a_{n+1} とする。 $f(x)$ の $x = a_n$ における接線の方程式は $y = \frac{2}{a_n}x - \frac{1}{a_n^2}$ と表される。これから、 a_{n+1} は a_n を用いて $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 1}{2a_n}$ と表される。特に $a_2 = \frac{17}{9}$ である。

23 [神戸大]

- $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$ とする。このとき、次の各問いに答えよ。
- (1) $\sqrt{2} < a_{n+1} < a_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$ を示せ。
 - (2) $a_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$ を示せ。
 - (3) $|a_5 - \sqrt{2}| < 10^{-10}$ を示せ。ただし、 $1.41 < \sqrt{2} < 1.42$ を用いてよい。

$f(x) = x^2 - 2$
 $f'(x) = 2x$
 $T(x) = f(a_n) + f'(a_n)(x - a_n)$
 $T(x) = a_n^2 - 2 + 2a_n(x - a_n)$
 $T(x) = 2a_n x - a_n^2 - 2$
 $T(x) = 0$
 $2a_n x = a_n^2 + 2$
 $x = \frac{a_n^2 + 2}{2a_n}$
 $a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{2a_n}$

$\sqrt{2} < a_{n+1} < a_n$ を示す
 $\sqrt{2} < \frac{a_n^2 + 2}{2a_n} < a_n$
 $2\sqrt{2}a_n < a_n^2 + 2 < 2a_n^2$
 $2\sqrt{2} < \frac{a_n^2 + 2}{a_n} < 2a_n$
 $2\sqrt{2} < a_n + \frac{2}{a_n} < 2a_n$
 $2\sqrt{2} - a_n < \frac{2}{a_n} < a_n$
 $2\sqrt{2} - a_n < a_n$
 $2\sqrt{2} < 2a_n$
 $\sqrt{2} < a_n$

$a_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2}$ を示す
 $\frac{a_n^2 + 2}{2a_n} - \sqrt{2} < \frac{(a_n - \sqrt{2})^2}{2}$
 $\frac{a_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}a_n}{2a_n} < \frac{a_n^2 - 2\sqrt{2}a_n + 2}{2}$
 $a_n^2 + 2 - 2\sqrt{2}a_n < a_n^2 - 2\sqrt{2}a_n + 2a_n$
 $2 < 2a_n$
 $1 < a_n$

$|a_5 - \sqrt{2}| < 10^{-10}$ を示す
 $a_1 = 2$
 $a_2 = \frac{2^2 + 2}{2 \cdot 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$
 $a_3 = \frac{(\frac{3}{2})^2 + 2}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{\frac{9}{4} + 2}{3} = \frac{\frac{17}{4}}{3} = \frac{17}{12}$
 $a_4 = \frac{(\frac{17}{12})^2 + 2}{2 \cdot \frac{17}{12}} = \frac{\frac{289}{144} + 2}{\frac{17}{6}} = \frac{\frac{289 + 288}{144}}{\frac{17}{6}} = \frac{577}{144} \cdot \frac{6}{17} = \frac{577}{408}$
 $a_5 = \frac{(\frac{577}{408})^2 + 2}{2 \cdot \frac{577}{408}} = \frac{\frac{332929}{166464} + 2}{\frac{577}{204}} = \frac{\frac{332929 + 332928}{166464}}{\frac{577}{204}} = \frac{665857}{166464} \cdot \frac{204}{577} = \frac{665857}{8192}$

19 [2011 三重大]

c を定数として数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める。

$$a_1 = c+1, a_{n+1} = \frac{n}{n+1}a_n + 1 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

- (1) a_2, a_3, a_4 を求めよ。また、一般項 a_n の形を推定し、その推定が正しいことを証明せよ。
- (2) $c = 324$ のとき、 a_n の値が自然数となるような n をすべて求めよ。

20 [埼玉大]

実数 a を超えない最大の整数を記号 $[a]$ で表すことにする。数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = -4, a_2 = 2, a_n = \left[\frac{a_{n-1} + a_{n-2} + 3}{2} \right] \quad (n \geq 3)$$

- (1) a_3, a_4, a_5, a_6 を求めよ。
- (2) $n \geq 7$ のとき a_n を推定し、その推定した結果が正しいことを証明せよ。

21 [大阪府立大]

数列 $\{a_n\}$ は次の関係式(i), (ii)を満たしている。

- (i) $a_1 = 1$
 - (ii) $a_1 a_2 + a_2 a_3 + \dots + a_n a_{n+1} = 2(a_1 a_n + a_2 a_{n-1} + \dots + a_n a_1) \quad (n=1, 2, \dots)$
- 一般項 a_n を求めよ。

24 [2006 兵庫県立大]

関数 $y = f(x) = x^2 - b \quad (b > 0)$ が定める放物線を C とし、数列 a_1, a_2, \dots を次のように定める。初項 a_1 は $a_1 > \sqrt{b}$ を満たし、 a_n に対して、 C 上の点 $A_n(a_n, f(a_n))$ における C の接線が x 軸と交わる点の x 座標を a_{n+1} とする。

- (1) $a_{n+1} \quad (n \geq 1)$ を a_n を用いて表せ。
- (2) すべての自然数 n に対して、不等式 $0 < a_{n+1} - \sqrt{b} < \frac{1}{2\sqrt{b}}(a_n - \sqrt{b})^2$ が成り立つことを示せ。
- (3) $b = 26, a_1 = 6$ として、 a_3 と $\sqrt{26}$ の差は $\frac{1}{10^3}$ 未満であることを示せ。

25 [2011 明治学院大]

数列 $\{a_n\}$ が次の2つの条件を満たしている。

$$a_1 = \frac{1}{3}, a_{n+1} = \frac{1}{1-a_n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

このとき、 $a_2, a_3, \dots, \sum_{k=1}^{100} a_k$ を求めよ。

26 [2019 岡山大学]

a, b を正の数とする。数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = a, x_2 = b, x_{n+2} = \frac{1+x_{n+1}}{x_n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

により定める。

(1) x_6, x_7 を a, b を用いて表せ。

(2) $a=2$ とする。 x_n ($n=1, 2, 3, \dots$) がすべて自然数になるような b の値をすべて求めよ。

30 [2013 香川大]

数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = 2, \begin{cases} a_n < 100 \text{ のとき, } a_{n+1} = a_n + 3 \\ a_n \geq 100 \text{ のとき, } a_{n+1} = a_n - 100 \end{cases}$$

(1) $a_n > a_{n+1}$ を満たす最小の自然数 n を m とおく。 m, a_m および $\sum_{k=1}^m a_k$ を求めよ。

(2) a_{105} および $\sum_{k=1}^{105} a_k$ を求めよ。

d) $\sum_{k=1}^{105} a_k < 100$ 以上 100 以下まで増減を繰り返す

$$a_n = 2 + 9 \cdot (n-1)$$

$$\therefore a_n = 9n - 1 \quad (n \geq 1)$$

$$0n \geq 100 \text{ 以上 } 2 \leq 9n - 1 < 100$$

$$9n - 1 \geq 100 \Rightarrow n \geq \frac{101}{9}$$

$$a_{99} = 101, a_{100} = 1 \Rightarrow a_{100} = 99$$

$$\sum_{k=1}^{99} a_k = \frac{99}{2} (2 + 101) = 175 \cdot 99$$

① 2, 5, ... ② 101, 1, ... ③ 100, 0, 99, ... ④ 102, 2, 5, ...

$$a_{100} = 99$$

$$\sum_{k=1}^{105} a_k = 175 \cdot 99 + (175 - 99) + (175 + 99) + 7 = 175 \cdot 98 + 7 = 172607$$

31 [2000 東京水産大]

数列 $\{a_n\}$ ($n=0, 1, 2, \dots$) は次の性質 (A), (B) を満たすとする。

(A) $a_0 = 4.2$

(B) $k=0, 1, 2, \dots$ に対して、 $a_k < 4.5$ ならば $a_{k+1} = a_k + 0.5$, $4.5 \leq a_k$ ならば $a_{k+1} = 0.9a_k$

(1) a_1, a_2 を求めよ。

(2) n が奇数ならば $4.5 < a_n < 5$ が成り立ち、 n が偶数ならば $4 < a_n < 4.5$ が成り立つことを示せ。

(3) すべての n に対して $a_n < a_{n+2}$ が成り立つことを示せ。

27 [2014 芝浦工業大]

条件 $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

このとき $a_5 = \frac{7}{\square}$ であり、 $a_{2014} = \frac{1}{\square}$ である。

28 [1997 早稲田大]

数列 $\{a_n\}$ を $a_{97} = 97, a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) で定めるとき、 a_1 の値を求めよ。

29 [2019 岡山大学]

a, b を正の数とする。数列 $\{x_n\}$ を $x_1 = a, x_2 = b, x_{n+2} = \frac{1+x_{n+1}}{x_n}$ ($n=1, 2, 3, \dots$)

により定める。

(1) x_6, x_7 を a, b を用いて表せ。

(2) x_n ($n=1, 2, 3, \dots$) がすべて自然数になるような a, b の組をすべて求めよ。

32 [2008 早稲田大]

実数 a は $0 < a < 1$ を満たす。数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

(i) $a_1 = a$

(ii) $n=2, 3, 4, \dots$ に対しては、

$$a_{n-1} \leq 1 \text{ のとき } a_n = \frac{1}{a_{n-1}}, \quad a_{n-1} > 1 \text{ のとき } a_n = a_{n-1} - 1$$

(1) $a = \sqrt{2} - 1$ のとき、 a_{125} の値を求めよ。

(2) $a_1 = a_6$ となるような a の値をすべて求めよ。

25

$$a_2 = \frac{1}{1-a_1} = \frac{2}{2-1} = 2$$

$$a_3 = \frac{1}{1-a_2} = \frac{1}{1-2} = -1$$

$$a_4 = \frac{1}{1-a_3} = \frac{1}{1-(-1)} = \frac{1}{2} = a_1$$

$$a_5 = \frac{2}{2}, a_6 = \frac{1}{2},$$

... 2と1と1/2

$$\sum_{k=1}^{100} a_k = \left(\frac{2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{2}{2} + \frac{1}{2}\right) \times 33 + \frac{2}{2} = -\frac{7}{2} \times 33 + \frac{2}{2} = -97 \frac{1}{2}$$

26

$$x_3 = \frac{1+x_2}{x_1} = \frac{1+b}{a}$$

$$x_4 = \frac{1+x_3}{x_2} = \frac{1+\frac{1+b}{a}}{b} = \frac{a+b+1}{ab}$$

$$x_5 = \frac{1+x_4}{x_3} = \frac{1+\frac{a+b+1}{ab}}{\frac{1+b}{a}} = \frac{a(b+a+b+1)}{b(b+1)}$$

$$= \frac{(a+1)(b+1)}{b(b+1)} = \frac{a+1}{b}$$

$$x_6 = \frac{1+x_5}{x_4} = \frac{1+\frac{a+1}{b}}{\frac{a+b+1}{ab}} = \frac{ab+ab(a+1)}{ab(a+b+1)} = \frac{a(a+b+1)}{ab(a+b+1)} = \frac{a}{b}$$

$$x_7 = \frac{1+x_6}{x_5} = \frac{1+\frac{a}{b}}{\frac{a+1}{b}} = \frac{b+a+1}{a+1} = b$$

2と1と1/2

$0 = 2$ のとき

$$x_2 = b, x_3 = \frac{1+b}{a}, x_4 = \frac{b+1}{2b}, x_5 = \frac{2}{b}$$

$\Rightarrow a=1$ ならば $x_2=2, x_3=1, x_4=1/2, x_5=2$

$x_2 = b=1$ ならば $x_3=2, x_4=1, x_5=1/2$

$x_3 = 1/2$ ならば $x_4=2, x_5=1, x_6=1/2$

$x_4 = 1$ ならば $x_5=2, x_6=1, x_7=2$

$x_5 = 1/2$ ならば $x_6=2, x_7=1, x_8=1/2$

...

$b=1, 2, 1/2$

33 [2012 早稲田大]

初項を $a_0 \geq 0$ とし、以下の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}_{n=0, 1, \dots}$ を考える。

$$a_{n+1} = a_n - [\sqrt{a_n}] \quad (n \geq 0)$$

ただし $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

- $a_0 = 24$ とする。このとき、 $a_n = 0$ となる最小の n を求めよ。
- m を 2 以上の整数とし、 $a_0 = m^2$ とする。このとき、 $1 \leq j \leq m$ を満たす j に対して a_{2j-1}, a_{2j} を j と m で表せ。
- m を 2 以上の整数、 p を $1 \leq p \leq m-1$ を満たす整数とし、 $a_0 = m^2 - p$ とする。このとき、 $a_n = (m-p)^2$ となる n を求めよ。さらに、 $a_n = 0$ となる最小の n を求めよ。

① $a_0 \leq 1$

$$a_0 = 0, 1 \quad a_1 = 0, 1 \quad a_2 = 0, 1 \quad \dots$$

$$a_1 = 0, 1 \quad a_2 = 1$$

② $a_0 = m^2$

$$a_1 = m^2 - m = m(m-1)$$

$$a_2 = m^2 - m - (m-1) = m^2 - 2m + 1 = (m-1)^2$$

$$a_3 = m^2 - 2m + 1 - (m-1) = m^2 - 3m + 2 = (m-1)(m-2)$$

$$a_4 = m^2 - 3m + 2 - (m-2) = m^2 - 4m + 4 = (m-2)^2$$

$$a_5 = (m-2)^2 - (m-2) = (m-1)(m-2)$$

$$a_6 = (m-1)(m-2) - (m-2) = (m-2)^2$$

$$a_7 = (m-2)^2 - (m-2) = (m-1)(m-2)$$

$$a_8 = (m-1)(m-2) - (m-2) = (m-2)^2$$

$$a_{2j-1} = (m-j)(m-j) = (m-j)^2$$

$$a_{2j} = (m-j)^2$$

③ $a_0 = m^2 - p \quad m^2 - p < m^2 - 1$

$$a_1 = m^2 - p - m = m(m-1) - p > m(m-1) - (m-1)^2$$

$$[\sqrt{a_1}] = m-1$$

$$a_2 = m^2 - p - (m-1)$$

$$= m(m-1) - p - (m-1) > m(m-1) - (m-1)$$

$$a_3 = m(m-1) - p - (m-1) = (m-1)^2 - p$$

$$a_4 = (m-1)^2 - p - (m-1)$$

$$= (m-1)^2 - p - (m-1) = (m-1)^2 - p - (m-1)$$

$$a_5 = (m-1)^2 - p - (m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 2(m-1)$$

$$a_6 = (m-1)^2 - p - 2(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 3(m-1)$$

$$a_7 = (m-1)^2 - p - 3(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 4(m-1)$$

$$a_8 = (m-1)^2 - p - 4(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 5(m-1)$$

$$a_9 = (m-1)^2 - p - 5(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 6(m-1)$$

$$a_{10} = (m-1)^2 - p - 6(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 7(m-1)$$

$$a_{11} = (m-1)^2 - p - 7(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 8(m-1)$$

$$a_{12} = (m-1)^2 - p - 8(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 9(m-1)$$

$$a_{13} = (m-1)^2 - p - 9(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 10(m-1)$$

$$a_{14} = (m-1)^2 - p - 10(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 11(m-1)$$

$$a_{15} = (m-1)^2 - p - 11(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 12(m-1)$$

$$a_{16} = (m-1)^2 - p - 12(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 13(m-1)$$

$$a_{17} = (m-1)^2 - p - 13(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 14(m-1)$$

$$a_{18} = (m-1)^2 - p - 14(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 15(m-1)$$

$$a_{19} = (m-1)^2 - p - 15(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 16(m-1)$$

$$a_{20} = (m-1)^2 - p - 16(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 17(m-1)$$

$$a_{21} = (m-1)^2 - p - 17(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 18(m-1)$$

$$a_{22} = (m-1)^2 - p - 18(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 19(m-1)$$

$$a_{23} = (m-1)^2 - p - 19(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 20(m-1)$$

$$a_{24} = (m-1)^2 - p - 20(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 21(m-1)$$

$$a_{25} = (m-1)^2 - p - 21(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 22(m-1)$$

$$a_{26} = (m-1)^2 - p - 22(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 23(m-1)$$

$$a_{27} = (m-1)^2 - p - 23(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 24(m-1)$$

$$a_{28} = (m-1)^2 - p - 24(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 25(m-1)$$

$$a_{29} = (m-1)^2 - p - 25(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 26(m-1)$$

$$a_{30} = (m-1)^2 - p - 26(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 27(m-1)$$

$$a_{31} = (m-1)^2 - p - 27(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 28(m-1)$$

$$a_{32} = (m-1)^2 - p - 28(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 29(m-1)$$

$$a_{33} = (m-1)^2 - p - 29(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 30(m-1)$$

$$a_{34} = (m-1)^2 - p - 30(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 31(m-1)$$

$$a_{35} = (m-1)^2 - p - 31(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 32(m-1)$$

$$a_{36} = (m-1)^2 - p - 32(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 33(m-1)$$

$$a_{37} = (m-1)^2 - p - 33(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 34(m-1)$$

$$a_{38} = (m-1)^2 - p - 34(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 35(m-1)$$

$$a_{39} = (m-1)^2 - p - 35(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 36(m-1)$$

$$a_{40} = (m-1)^2 - p - 36(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 37(m-1)$$

$$a_{41} = (m-1)^2 - p - 37(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 38(m-1)$$

$$a_{42} = (m-1)^2 - p - 38(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 39(m-1)$$

$$a_{43} = (m-1)^2 - p - 39(m-1) - (m-1) = (m-1)^2 - p - 40(m-1)$$

34 [2001 甲南大]

a を実数とする。数列 $\{a_n\}$ が、次のように定められている。

$$a_1 = a, \quad a_{n+1} = |-2a_n + 3| \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

- $a = 4$ のとき、 a_1, a_2, a_3 および a_4 の値を求めよ。
- $a > 3$ のとき、一般項 a_n を a と n の式で表せ。
- $0 \leq a \leq 3$ のとき、任意の正の整数 n に対して $0 \leq a_n \leq 3$ となることを示せ。

35 [2018 慶応義塾大]

実数 x に対して、 $[x]$ は x 以下の最大の整数とする。数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + [\sqrt{n+1}] \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

$$b_1 = 1, \quad b_{n+1} = b_n + (-1)^n [\sqrt{n+1}] \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

で定義すると

(1) $a_{10} = \square$, $b_{10} = \square$ である。

(2) $a_n \geq 100$ となるのは $n \geq \square$ のときである。

(3) $b_n = 5$ となる最初の項は $n = \square$ のときである。

(4) 一般に、 $m = [\sqrt{n}]$ とすると

$$a_n = \square mn + \square m + \square + \square m^2 + \square m$$

となる。

36 [2001 福井大]

数列 $\{a_n\}$ について、 $a_1 = 1, a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$ が成り立つとする。

- すべての n について、 $0 < a_n < 2$ が成り立つことを、 n に関する数学的帰納法で示せ。
- $a_n = 2 \cos \theta_n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$ とおくとき、 θ_1 を求め、 $\theta_{n+1} = \theta_n$ を用いて表せ。ただし、 $0^\circ < \theta_n < 90^\circ \quad (n=1, 2, 3, \dots)$ とする。
- 一般項 a_n を求めよ。

① $a_1 = 1 < 2$

$a_2 = \sqrt{2+1} = \sqrt{3} < 2$

② $a_1 = 1 < 2$ と仮定して a_2, a_3, \dots を示す

$0 < a_n < 2$

$a_{n+1} = \sqrt{2+a_n} < \sqrt{2+2} = 2$

$0 < a_n < 2 \Rightarrow \sqrt{2+a_n} < \sqrt{2+2} = 2 \Rightarrow a_{n+1} < 2$

$\therefore n \geq 2$ に対して

③ $a_1 = 2 \cos \theta_1 = 1 \Rightarrow \theta_1 = 60^\circ$

$a_2 = \sqrt{2+1} = \sqrt{3} = 2 \cos 30^\circ$

$a_3 = \sqrt{2+\sqrt{3}} = 2 \cos 15^\circ$

$a_4 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} = 2 \cos 7.5^\circ$

$a_5 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} = 2 \cos 3.75^\circ$

$a_6 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}} = 2 \cos 1.875^\circ$

$a_7 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}} = 2 \cos 0.9375^\circ$

$a_8 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}} = 2 \cos 0.46875^\circ$

$a_9 = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}} = 2 \cos 0.234375^\circ$

$a_{10} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}}} = 2 \cos 0.1171875^\circ$

$a_{11} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}}} = 2 \cos 0.05859375^\circ$

$a_{12} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}}} = 2 \cos 0.029296875^\circ$

$a_{13} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}}} = 2 \cos 0.0146484375^\circ$

$a_{14} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}}} = 2 \cos 0.00732421875^\circ$

$a_{15} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}}} = 2 \cos 0.003662109375^\circ$

$a_{16} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}}} = 2 \cos 0.0018310546875^\circ$

$a_{17} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}}} = 2 \cos 0.00091552734375^\circ$

$a_{18} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}}} = 2 \cos 0.000457763671875^\circ$

$a_{19} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}}} = 2 \cos 0.0002288818359375^\circ$

$a_{20} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}}} = 2 \cos 0.00011444091796875^\circ$

$a_{21} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}}} = 2 \cos 0.000057220458984375^\circ$

$a_{22} = \sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}}} = 2 \cos 0.0000286102294921875^\circ$

$a_{23} = \sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}}} = 2 \cos 0.00001430511474609375^\circ$

$a_{24} = \sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}}} = 2 \cos 0.000007152557373046875^\circ$

$a_{25} = \sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}}} = 2 \cos 0.0000035762786865234375^\circ$

$a_{26} = \sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}}} = 2 \cos 0.00000178813934326171875^\circ$

$a_{27} = \sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}}} = 2 \cos 0.000000894069671630859375^\circ$

$a_{28} = \sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}}} = 2 \cos 0.0000004470348358154296875^\circ$

$a_{29} = \sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}}} = 2 \cos 0.00000022351741790771484375^\circ$

$a_{30} = \sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}}} = 2 \cos 0.000000111758708953857421875^\circ$

$a_{31} = \sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}}} = 2 \cos 0.0000000558793544769287109375^\circ$

$a_{32} = \sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}}} = 2 \cos 0.00000002793967723846435546875^\circ$

$a_{33} = \sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}}} = 2 \cos 0.000000013969838619232177734375^\circ$

$a_{34} = \sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}}} = 2 \cos 0.0000000069849193096160888671875^\circ$

$a_{35} = \sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}}}} = 2 \cos 0.00000000349245965480804443359375^\circ$

$a_{36} = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2$