18 [2015 県立広島大]

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1=-1,\ a_{n+1}=\frac{5a_n+9}{-a_n+11}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2)　一般項 a_n を推測し，その結果を数学的帰納法によって証明せよ。

(3)　$a_n<3$ を示せ。

(4)　$a_n<a_{n+1}$ を示せ。

(5)　a_n が自然数となる n をすべて求めよ。

(1) $a_2=\frac{5a_1+9}{-a_1+11}=\frac{1}{3}$

$a_3=\frac{5a_2+9}{-a_2+11}=1$

$a_4=\frac{5a_3+9}{-a_3+11}=\frac{7}{5}$

$-1,\ \frac{1}{3},\ 1,\ \frac{7}{5}$

$-1=\frac{-2}{2}$，$1=\frac{4}{4}$

(2) $a_n=\frac{3n-5}{n+1}$ と推測できる

(i) $n=1$ のとき

$a_1=\frac{-2}{2}=-1$

(ii) $n=k\ (k=1,2,\cdots)$ のとき成り立つと仮定して

$a_k=\frac{3k-5}{k+1}$

$n=k+1$ のとき成り立つことを示す

$a_{k+1}=\frac{5a_k+9}{-a_k+11}$

$=\frac{5\cdot\frac{3k-5}{k+1}+9}{-\frac{3k-5}{k+1}+11}$

$=\frac{5(3k-5)+9(k+1)}{-(3k-5)+11(k+1)}$

$=\frac{24k-16}{8k+16}$

$=\frac{3k-2}{k+2}=\frac{3(k+1)-5}{(k+1)+1}$

より成り立つ

(i)(ii)から数学的帰納法より

$a_n=\frac{3n-5}{n+1}\ (n=1,2,\cdots)$

(3) $3-a_n=3-\frac{3n-5}{n+1}$

$=\frac{3(n+1)-(3n-5)}{n+1}=\frac{8}{n+1}>0$

$\therefore a_n<3$ □

(4) $a_{n+1}-a_n=\frac{3n-2}{n+2}-\frac{3n-5}{n+1}$

$=\frac{8}{(n+1)(n+2)}>0$

$\therefore a_n<a_{n+1}$ □

(5) (4)より a_n は単調増加かつ

$a_n<3$ より

a_n が自然数となるとき

$a_n=1,\ 2$

$a_n=1$ となるとき $n=3$

$a_n=2$ となるとき

$\frac{3n-5}{n+1}=2$

$3n-5=2(n+1)$

$\therefore n=7$

よって

$n=3,\ 7$ //

19 [2011 三重大]

c を定数として数列 $\{a_n\}$ を次の条件によって定める。

$$a_1=c+1,\ a_{n+1}=\frac{n}{n+1}a_n+1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。また，一般項 a_n の形を推定し，その推定が正しいことを証明せよ。

(2)　$c=324$ のとき，a_n の値が自然数となるような n をすべて求めよ。

20 [埼玉大]

実数 a を超えない最大の整数を記号 $[a]$ で表すことにする．数列 $\{a_n\}$ を

$a_1=-4,\ a_2=2,\ a_n=\left[\frac{a_{n-1}+a_{n-2}+3}{2}\right]\ (n\geqq 3)$ によって定める．

(1) a_3, a_4, a_5, a_6 を求めよ．

(2) $n\geqq 7$ のとき a_n を推定し，その推定した結果が正しいことを証明せよ．

21 [大阪府立大]

数列 $\{a_n\}$ は次の関係式(i)，(ii)を満たしている．

(i) $a_1=1$

(ii) $a_1a_2+a_2a_3+\cdots\cdots+a_na_{n+1}=2(a_1a_n+a_2a_{n-1}+\cdots\cdots+a_na_1)\ (n=1,2,\cdots\cdots)$

一般項 a_n を求めよ．

22 [2008 青山学院大]

関数 $f(x)=x^2-2$ を用いて数列を次のように定める。まず，$a_0=2$ として $f(x)$ の $x=a_0$ における接線が x 軸と交わる点の x 座標を a_1 とする。このとき $a_1=$ ア□ である。以下同様にして，$x=a_n$ における $f(x)$ の接線が x 軸と交わる点の x 座標を a_{n+1} とする。$f(x)$ の $x=a_n$ における接線の方程式は $y=$ イ□ と表される。これから，a_{n+1} は a_n を用いて $a_{n+1}=$ ウ□ と表される。特に $a_2=$ エ□ である。

23 [神戸大]

$a_1=2,\ a_{n+1}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n}\ (n=1,2,3,\cdots\cdots)$ とする．このとき，次の各問いに答えよ．

(1) $\sqrt{2}<a_{n+1}<a_n\ (n=1,2,3,\cdots\cdots)$ を示せ．

(2) $a_{n+1}-\sqrt{2}<\frac{(a_n-\sqrt{2})^2}{2}\ (n=1,2,3,\cdots\cdots)$ を示せ．

(3) $|a_5-\sqrt{2}|<10^{-10}$ を示せ．ただし，$1.41<\sqrt{2}<1.42$ を用いてよい．

22

$f(x)=x^2-2$

$f'(x)=2x$

$y=f(x)$ の $x=a_0=2$ における接線は

$y-f(2)=f'(2)(x-2)$

$y-2=4(x-2)$

$\therefore y=4x-6$

これと x 軸との交点の x 座標は

$4x-6=0$　$\therefore a_1=\boxed{\frac{3}{2}}$

$y=f(x)$ の $x=a_n$ における接線は

$y-f(a_n)=f'(a_n)(x-a_n)$

$y-(a_n^2-2)=2a_n(x-a_n)$

$\therefore \boxed{y=2a_nx-a_n^2-2}$

これと x 軸との交点の x 座標は

$2a_nx-a_n^2-2=0$

$\therefore a_{n+1}=\boxed{\frac{a_n^2+2}{2a_n}}=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n}$

$a_2=\frac{a_1^2+2}{2a_1}=\frac{\frac{17}{4}}{3}=\boxed{\frac{17}{12}}$

23

(1) $\boxed{\sqrt{2}<a_{n+1}}$

$n=1$ のとき $a_2=\frac{3}{2}>\sqrt{2}$ より成り立つ

$\sqrt{2}<a_{k+1}\ (k=1,2,\cdots)$ と仮定して

$a_{k+2}-\sqrt{2}=\frac{a_{k+1}}{2}+\frac{1}{a_{k+1}}-\sqrt{2}$

$=\frac{a_{k+1}^2-2\sqrt{2}a_{k+1}+2}{2a_{k+1}}$

$=\frac{(a_{k+1}-\sqrt{2})^2}{2a_{k+1}}>0$

よって $\sqrt{2}<a_{n+1}\ (n=1,2,\cdots)$

$\boxed{a_{n+1}<a_n}$

$a_n-a_{n+1}=a_n-\left(\frac{a_n}{2}+\frac{1}{a_n}\right)$

$=\frac{a_n}{2}-\frac{1}{a_n}$

$=\frac{a_n^2-2}{2a_n}>0\ (a_n>\sqrt{2})$

$\therefore a_{n+1}<a_n$

(2) $a_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{(a_n-\sqrt{2})^2}{2a_n}<\frac{(a_n-\sqrt{2})^2}{2}$　$(a_n>\sqrt{2})$

(3) $|a_5-\sqrt{2}|=a_5-\sqrt{2}$

$<\frac{1}{2}(a_4-\sqrt{2})^2$

$<\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(a_3-\sqrt{2})^2\right\}^2$

$<\frac{1}{2^3}(a_3-\sqrt{2})^4$

$<\frac{1}{2^7}(a_2-\sqrt{2})^8$　$2^7=128$

$<\frac{1}{10^2}\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^8=10^{-10}$ □

24 [2006 兵庫県立大]

関数 $y=f(x)=x^2-b\ (b>0)$ が定める放物線を C とし，数列 a_1，a_2，$\cdots\cdots$ を次のように定める。初項 a_1 は $a_1>\sqrt{b}$ を満たし，a_n に対して，C 上の点 $A_n(a_n,\ f(a_n))$ における C の接線が x 軸と交わる点の x 座標を a_{n+1} とする。

(1)　$a_{n+1}\ (n\geqq 1)$ を a_n を用いて表せ。

(2)　すべての自然数 n に対して，不等式 $0<a_{n+1}-\sqrt{b}<\frac{1}{2\sqrt{b}}(a_n-\sqrt{b})^2$ が成り立つことを示せ。

(3)　$b=26$，$a_1=6$ として，a_3 と $\sqrt{26}$ の差は $\frac{1}{10^3}$ 未満であることを示せ。

$\boxed{25}$ [2011 明治学院大]

数列 $\{a_n\}$ が次の２つの条件を満たしている。

$$a_1=\frac{1}{3},\ a_{n+1}=\frac{1}{1-a_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

このとき，a_2，a_3，$\sum_{k=1}^{100} a_k$ を求めよ。

$\boxed{26}$ [2019 岡山大]

a，b を正の数とする。数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1=a,\ x_2=b,\ x_{n+2}=\frac{1+x_{n+1}}{x_n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

により定める。

(1)　x_6，x_7 を a，b を用いて表せ。

(2)　$a=2$ とする。x_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ がすべて自然数になるような b の値をすべて求めよ。

$\boxed{25}$

$a_2=\frac{1}{1-a_1}=\frac{3}{2}$

$a_3=\frac{1}{1-a_2}=-2$

$a_4=\frac{1}{1-a_3}=\frac{1}{3}=a_1$

$a_5=\frac{3}{2}$, $a_6=\frac{1}{3}$,

…… あとはくり返し

$\sum_{k=1}^{100} a_k=(\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3})\times 33+\frac{3}{2}$

$=-\frac{7}{6}\cdot 33+\frac{3}{2}=-37$

$\boxed{26}$

$x_3=\frac{1+x_2}{x_1}=\frac{1+b}{a}$

$x_4=\frac{1+x_3}{x_2}=\frac{1+\frac{1+b}{a}}{b}=\frac{a+b+1}{ab}$

$x_5=\frac{1+x_4}{x_3}=\frac{1+\frac{a+b+1}{ab}}{\frac{1+b}{a}}=\frac{ab+a+b+1}{b(1+b)}$

$=\frac{(a+1)(b+1)}{b(b+1)}=\frac{a+1}{b}$

$x_6=\frac{1+x_5}{x_4}=\frac{1+\frac{a+1}{b}}{\frac{a+b+1}{ab}}=\frac{ab+a(a+1)}{a+b+1}$

$=\frac{a(a+b+1)}{a+b+1}=a$

$x_7=\frac{1+x_6}{x_5}=\frac{1+a}{\frac{a+1}{b}}=b$

⋮

あとはくり返し

$a=2$ のとき

$x_2=b$, $x_3=\frac{1+b}{2}$, $x_4=\frac{b+3}{2b}$, $x_5=\frac{3}{b}$

これらがすべて自然数となればよい

$x_2=b$ より b は自然数

x_5 が自然数となるとき $b=1, 3$

$b=1$ のとき　$x_3=1$, $x_4=2$　○

$b=3$ 〃　　$x_3=2$, $x_4=1$　○

よって

$b=1, 3$

$\boxed{27}$ [2014 芝浦工業大]

条件 $a_1=2$，$a_{n+1}=\frac{a_n-1}{a_n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

このとき $a_5=$ ア $\boxed{}$ であり，$a_{2014}=$ イ $\boxed{}$ である。

$\boxed{28}$ [1997 早稲田大]

数列 $\{a_n\}$ を $a_{97}=97, a_{n+1}=1-\frac{1}{a_n}$ $(n=1,2,3,\cdots\cdots)$ で定めるとき，a_1 の値を求めよ．

$\boxed{29}$ [2019 岡山大]

a，b を正の数とする。数列 $\{x_n\}$ を $x_1=a$，$x_2=b$，$x_{n+2}=\frac{1+x_{n+1}}{x_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ により定める。

(1)　x_6，x_7 を a，b を用いて表せ。

(2)　x_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ がすべて自然数になるような a，b の組をすべて求めよ。

$\boxed{30}$ [2013 香川大]

数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1=2,\ \begin{cases} a_n<100 \text{ のとき，} a_{n+1}=a_n+3 \\ a_n\geqq 100 \text{ のとき，} a_{n+1}=a_n-100 \end{cases}$$

(1)　$a_n>a_{n+1}$ を満たす最小の自然数 n を m とおく。m，a_m および $\sum_{k=1}^{m} a_k$ を求めよ。

(2)　a_{105} および $\sum_{k=1}^{105} a_k$ を求めよ。

(1) 最初に100以上となるまでの一般項 a_n は

$a_n=2+3(n-1)$

∴ $a_n=3n-1$ (単調増加)

$a_n\geqq 100$ となるとき

$3n-1\geqq 100$　$n\geqq\frac{101}{3}$ (=33.66…)

$a_{34}=101$, $a_{35}=1$ より $m=34$

$\sum_{k=1}^{34} a_k=\frac{34(2+101)}{2}=1751$

(2) 2, 5, …, 101, 1, ……, 100, 0, 3, …, 102, 2, 5

$a_{105}=5$

$\sum_{k=1}^{105} a_k=1751+(1751-34)+(1751+34)+7$

$=1751\times 3+7$

$=5260$

$\boxed{31}$ [2000 東京水産大]

数列 $\{a_n\}$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$ は次の性質 (A), (B) を満たすとする．

(A)　$a_0=4.2$

(B)　$k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$ に対して，$a_k<4.5$ ならば $a_{k+1}=a_k+0.5$,
$4.5\leqq a_k$ ならば $a_{k+1}=0.9a_k$

(1)　a_1，a_2 を求めよ．

(2)　n が奇数ならば $4.5<a_n<5$ が成り立ち，n が偶数ならば $4<a_n<4.5$ が成り立つことを示せ．

(3)　すべての n に対して $a_n<a_{n+2}$ が成り立つことを示せ．

$\boxed{32}$ [2008 早稲田大]

実数 a は $0<a<1$ を満たす。数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

(i)　$a_1=a$

(ii)　$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots$ に対しては，

$$a_{n-1}\leqq 1 \text{ のとき}\quad a_n=\frac{1}{a_{n-1}},\qquad a_{n-1}>1 \text{ のとき}\quad a_n=a_{n-1}-1$$

(1)　$a=\sqrt{2}-1$ のとき，a_{125} の値を求めよ。

(2)　$a_1=a_6$ となるような a の値をすべて求めよ。

高2数学　夏期講習　漸化式　第2講　解けない漸化式

$\boxed{33}$ [2012 早稲田大]

初項を $a_0 \geqq 0$ とし，以下の漸化式で定まる数列 $\{a_n\}_{n=0,\ 1,\ \cdots\cdots}$ を考える。

$$a_{n+1}=a_n-[\sqrt{a_n}] \quad (n \geqq 0)$$

ただし $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。

(1) $a_0=24$ とする。このとき，$a_n=0$ となる最小の n を求めよ。

(2) m を 2 以上の整数とし，$a_0=m^2$ とする。このとき，$1 \leqq j \leqq m$ を満たす j に対して a_{2j-1}，a_{2j} を j と m で表せ。

(3) m を 2 以上の整数，p を $1 \leqq p \leqq m-1$ を満たす整数とし，$a_0=m^2-p$ とする。このとき，$a_k=(m-p)^2$ となる k を求めよ。さらに，$a_n=0$ となる最小の n を求めよ。

(1) a_0 より

$24, 20, 16, 12, 9, 6, 4, 2, 1, 0$

$n=9$ //　5^2-1

(2) $a_0=m^2$

$a_1=m^2-m=m(m-1)$

$m-1<\sqrt{m(m-1)}<m$ より

$a_2=m^2-m-(m-1)$

$=m^2-2m+1=(m-1)^2$

$a_3=(m-1)^2-(m-1)$

$=(m-1)(m-2)$

$a_4=(m-1)^2-(m-1)-(m-2)$

$=(m-2)^2$

$a_{2j-1}=(m-(j-1))(m-j)$ //

$a_{2j}=(m-j)^2$ //

(3) $a_0=m^2-p$　$m^2-p<m^2$ かつ

$m^2-p>m^2-m=m(m-1)>(m-1)^2$

$[\sqrt{m^2-p}]=m-1$

$a_1=m^2-p-(m-1)$

$=m(m-1)-(p-1)>m(m-1)-(m-1)=(m-1)^2$

$a_2=m(m-1)-(p-1)-(m-1)$

$=(m-1)^2-(p-1)$

$\vdots$

$a_k=(m-p)^2$ となる k は $k=2p$

はじめて $a_n=0$ となるのは (2) より

$n=2p+2(m-(p-1))+1$

$=2m-1$ //

$\boxed{34}$ [2001 甲南大]

a を実数とする．数列 $\{a_n\}$ が，次のように定められている．

$a_1=a$，$a_{n+1}=|-2a_n+3|$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(1) $a=4$ のとき，a_1，a_2，a_3 および a_4 の値を求めよ．

(2) $a>3$ のとき，一般項 a_n を a と n の式で表せ．

(3) $0 \leqq a \leqq 3$ のとき，任意の正の整数 n に対して $0 \leqq a_n \leqq 3$ となることを示せ．

$\boxed{35}$ [2018 慶応義塾大]

実数 x に対して，$[x]$ は x 以下の最大の整数とする。数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を

$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+[\sqrt{n+1}]$　　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$b_1=1$，$b_{n+1}=b_n+(-1)^n[\sqrt{n+1}]$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

で定義すると

(1) $a_{10}=$ ア $\boxed{}$，$b_{10}=$ イ $\boxed{}$ である。

(2) $a_n \geqq 100$ となるのは $n \geqq$ ウ $\boxed{}$ のときである。

(3) $b_n=5$ となる最初の項は $n=$ エ $\boxed{}$ のときである。

(4) 一般に，$m=[\sqrt{n}]$ とすると

$$a_n=\frac{{}^{\text{オ}}\boxed{}\,mn+{}^{\text{カ}}\boxed{}\,m^{{}^{\text{キ}}\boxed{}}+{}^{\text{ク}}\boxed{}\,m^2+{}^{\text{ケ}}\boxed{}\,m}{{}^{\text{コ}}\boxed{}}$$

となる。

$\boxed{36}$ [2001 福井大]

数列 $\{a_n\}$ について，$a_1=1$，$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成り立つとする．

(1) すべての n について，$0<a_n<2$ が成り立つことを，n に関する数学的帰納法で示せ．

(2) $a_n=2\cos\theta_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とおくとき，θ_1 を求め，θ_{n+1} を θ_n を用いて表せ．ただし，$0°<\theta_n<90°$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とする．

(3) 一般項 a_n を求めよ．

(1) i, $n=1$ のとき

$a_1=1$ より成り立つ

ii, $n=k$ $(k=1, 2, \cdots)$ のとき成り立つと仮定して

$0<a_k<2$

$n=k+1$ のとき成り立つことを示す

$0<a_k<2$ より $\sqrt{2}<\sqrt{2+a_k}<2$　$\therefore \sqrt{2}<a_k<2$

よって成り立つ

i, ii から数学的帰納法より

題意は示された

(2) $a_1=2\cos\theta_1$ より

$2\cos\theta_1=1$　$\cos\theta_1=\frac{1}{2}$

$0°<\theta_1<90°$ より $\theta_1=60°$ //

$a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$ より　　$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2}$ より

$2\cos\theta_{n+1}=\sqrt{2+2\cos\theta_n}$　　$1+\cos 2\theta=2\cos^2\theta$

$=\sqrt{4\cos^2\frac{\theta_n}{2}}$　　$0°<\theta_n<90°$ で $\cos\frac{\theta_n}{2}>0$ より

$=2\cos\frac{\theta_n}{2}$

$\cos\theta_{n+1}=\cos\frac{\theta_n}{2}$

$\underset{\alpha+\beta}{\cos\theta_{n+1}}-\underset{\alpha-\beta}{\cos\frac{\theta_n}{2}}=0$　　$\begin{cases}\alpha=\frac{1}{2}(\theta_{n+1}+\frac{\theta_n}{2})\\ \beta=\frac{1}{2}(\theta_{n+1}-\frac{\theta_n}{2})\end{cases}$

$-2\sin\frac{1}{2}(\theta_{n+1}+\frac{\theta_n}{2})\cos\frac{1}{2}(\theta_{n+1}-\frac{\theta_n}{2})=0$

$0°<\frac{1}{2}(\theta_{n+1}+\frac{\theta_n}{2})<90°$，$-22.5°<\frac{1}{2}(\theta_{n+1}-\frac{\theta_n}{2})<45°$ より

$\theta_{n+1}-\frac{\theta_n}{2}=0$　　$\therefore \theta_{n+1}=\frac{\theta_n}{2}$ //

(3) $\{\theta_n\}$ は初項 $\theta_1=60°$

公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列より

$\theta_n=60°\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}$

よって

$a_n=2\cos 60°\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}$ //

$\boxed{37}$ [和歌山大]

次の条件で定義される数列 $\{a_n\}$ がある．

$a_1=\sin^2\theta$, $a_{n+1}=4a_n(1-a_n)$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$

ただし，θ は $0°<\theta<90°$ をみたす定数である．このとき，

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項は，$a_n=\sin^2(2^{n-1}\theta)$ で表されることを数学的帰納法によって証明せよ．

(2) a_n が n によらず一定になるように，θ の値を定めよ．