高3理系数学　標準問題演習　演習　17.複素数平面(1)

$\boxed{1}$［九州歯科大］

(1) α を虚部が 0 でない複素数とする．α と共役な複素数と α^2 が等しいとき，α を求めよ．

(2) 複素数 $2-3i$ を表す点と実軸，原点，虚軸に関して対称な点が表す複素数をそれぞれ求めよ．

$\boxed{2}$［(1) 1996 島根大　(2) 関西大］

(1) 2 つの複素数 $z_1=3+i(2a-1)$, $z_2=a+2-i$ について，原点，z_1 の表す点，z_2 の表す点をそれぞれ $\mathrm{O}, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ とするとき，3 点 $\mathrm{O}, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ が同一直線上にあるような実数 a の値を求めよ．

(2) 複素数平面上で $2+3i, -1-2i, 3-i$ が表す点をそれぞれ $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$ とする．線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2, \mathrm{P}_1\mathrm{P}_3$ を 2 辺とする平行四辺形の残りの頂点を P_4 とするとき，P_4 を表す複素数は何か．

$\boxed{3}$［Ⅰ.小樽商科大　Ⅱ.中央大　Ⅲ.三重大　Ⅳ.神戸大　Ⅴ.自治医科大］

Ⅰ．$|z|=\sqrt{5}$，$z+\overline{z}=2$ であるような複素数 z を求めよ．

Ⅱ．a が実数のとき，2 次方程式 $x^2-ax+1=0$ が絶対値 1 の複素数を解としてもつような a の範囲を求めよ．

Ⅲ．(1) 複素数 z_1, z_2 に対し $|z_1+z_2| \leqq |z_1|+|z_2|$ が成り立つことを証明せよ．さらに等号が成立するのは z_1 と z_2 がどのような場合かを述べよ．

(2) 複素数 z_1, z_2 に対し $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$ が成り立つことを証明せよ．

(3) $|z|<1$ を満たす複素数 z に対し $z^4+9z^3+9z^2+7z+26 \neq 0$ を証明せよ．

Ⅳ．複素数 α, β について，$|\alpha|=|\beta|=2$，$\alpha+\beta+2=0$ であるとき，次の値を求めよ．

(1)　$\alpha\beta$

(2)　$\alpha^3+\beta^3+8$

Ⅴ．複素数 α，β が $|\alpha|=|\beta|=|\alpha-\beta|=1$ を満たすとき，$|2\beta-\alpha|$，$\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^3$ の値を求めよ．

$\boxed{4}$ [Ⅰ．2015 名城大　Ⅱ．1996 一橋大　Ⅳ．1996 学習院大]

Ⅰ．z を虚数とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$z+\dfrac{1}{z}$ が実数となるとき，z の絶対値 $|z|$ を求めよ。

(2)　$z+\dfrac{1}{z}$ が整数となる z をすべて求めよ。

Ⅱ．$z+\dfrac{4}{z}$ が実数であり，かつ $|z-2|=2$ であるような複素数 z を求めよ．

Ⅲ．α, β, γ はそれぞれ異なる複素数とする．$|\alpha|=|\beta|=|\gamma|=1$ のとき，

$$\frac{(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)}{\alpha\beta\gamma}$$

は純虚数になることを示せ．

Ⅳ．α, β を実数でない 2 つの複素数とするとき，$\alpha+\beta, \alpha\beta$ がともに実数ならば $\beta=\overline{\alpha}$ であることを証明せよ．

$\boxed{5}$ [Ⅰ．2021 関西大　Ⅱ．2016 佐賀大]

Ⅰ．i を虚数単位とし，$\alpha=\sqrt{3}+i$，$\beta=(\sqrt{3}-1)+(\sqrt{3}+1)i$ とおく。このとき，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ の偏角は ア$\boxed{}$ であり，β の偏角は イ$\boxed{}$ である。ただし，複素数 z の偏角 θ は，$0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲で考える。

Ⅱ．0 でない複素数 z の極形式を $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ とするとき，次の複素数を極形式で表せ。ただし，$0 \leqq \theta < 2\pi$ とし，また z と共役な複素数を $\overline{z}$ で表す。

(1)　$-\overline{z}$　　(2)　$\dfrac{1}{z^2}$　　(3)　$z-|z|$

高3理系数学　標準問題演習　演習　17.複素数平面(1)

$\boxed{6}$［Ⅰ．2002 京都産業大　Ⅱ．1999 京都産業大　Ⅲ．1999 奈良女子大］

Ⅰ．複素数平面上で，0，$\sqrt{3}+i$，α を表す点をそれぞれ O，A，B とする．△OAB が正三角形になるとき，α の値を求めよ．ここで，i は虚数単位を表す．

Ⅱ．複素数平面上の原点を O とし，$-1+3i$ を表す点を A とする．また，点 B を表す複素数を ${}^{ア}\boxed{}+i$ とし，点 C を表す複素数を ${}^{イ}\boxed{}+{}^{ウ}\boxed{}i$ とするとき，四角形 AOBC は正方形になる．

Ⅲ．(1)　複素数平面上の 3 点 0，z，z^2 を頂点とする三角形が正三角形となるような複素数 z をすべて求めよ．

(2)　どのような複素数 z に対しても，4 点 0，z，z^2，z^3 を頂点とする四角形は正方形とならないことを示せ．

$\boxed{7}$［2016 名城大］

複素数 $z=a+bi$ (a，b は実数) とし，$p=2+3i$ とする。複素数平面上で，点 z を原点を中心に $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転した点を表す複素数を u，点 z を点 p を中心に $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点を表す複素数を w とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　u を a，b を用いて表せ。

(2)　w を a，b を用いて表せ。

(3)　$u=w$ となるとき，a，b の値を求めよ。

$\boxed{8}$［(1) 福島大　(2) 佐賀大　(3) 慶応義塾大　(4) 福岡教育大　(5) 岩手大］

(1) 複素数平面上の 2 点 $\alpha=4-2i$，$\beta=3-3i$ に対して，点 α を点 β の周りに 30° 回転した点を表す複素数 γ を求めよ。

(2) 点 A $(2, 1)$ を点 P の周りに 60° 回転した点の座標は $\left(\dfrac{3}{2}-\dfrac{3\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ であった．点 P の座標を求めよ．

(3) 複素数平面上に 3 点 $z_1=-1+i$，$z_2=(\sqrt{3}-1)+2i$，実部を負の数とする z_3 をとる．3 つの点 z_1，z_2，z_3 を頂点とする三角形が正三角形であるのは，$z_3=\boxed{}$ のときである．

(4) 複素数平面上に，正方形の頂点 A, B, C, D がこの順に反時計回りに並んでいる．点 A, B の表す複素数を，それぞれ $1+i$, $-1+2i$ とするとき，点 C, D の表す複素数を求めよ．

(5) 複素数平面上で，点 $\mathrm{P}(1-\sqrt{3}\,i)$ を中心とする円に内接する正三角形がある。この正三角形の頂点の 1 つが点 A (2) であるとき，残りの 2 つの頂点を表す複素数を求めよ。ただし，i は虚数単位とする。

$\boxed{9}$ [(1) 小樽商科大　(2) 上智大　(3) 日本女子大　(4) 九州大]

(1) $\left(\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{2003}$ を求めよ．ただし，$i=\sqrt{-1}$ とする．

(2) i を虚数単位とする．次の計算をせよ．

$\dfrac{2+\sqrt{3}-i}{2+\sqrt{3}+i}={}^{ア}\boxed{}$, $\left(\dfrac{2+\sqrt{3}-i}{2+\sqrt{3}+i}\right)^3={}^{イ}\boxed{}$, $\left(\dfrac{2+\sqrt{3}-i}{2+\sqrt{3}+i}\right)^{1997}={}^{ウ}\boxed{}$

(3) 複素数 $\alpha=\dfrac{1+i}{\sqrt{3}+i}$ について，α^n が正の実数となるような最小の正の整数 n を求めよ．

(4) 等式 $(i-\sqrt{3})^m=(1+i)^n$ を満たす自然数 m，n のうち，m が最小となるときの m，n の値を求めよ。ただし，i は虚数単位である。

$\boxed{10}$ [(1) 岐阜薬科大　(2) 信州大　(3) 大阪女子大　(4) 近畿大]

(1) 複素数 z の方程式 $z^3=4\sqrt{2}(-1+i)$ がある．方程式を満たす 1 つの解を $z_1=a+bi$ $(a\geqq 0,\ b\geqq 0)$ とする．a，b を求めよ．他の 2 つの解を z_1 で表せ．
3 つの解を複素数平面上に点として表示し，これらの点を頂点とする三角形は正三角形であることを示せ．

(2) 方程式 $X^6-\sqrt{2}X^3+1=0$ の複素数解を求めよ．

(3) 方程式 $z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=0$ を解け．

(4) 16 乗 して 1 になる複素数は全部で 16 個あり，それらは

$$\cos\frac{360°\times k}{16}+i\sin\frac{360°\times k}{16}\ (k=0, 1, \cdots\cdots, 15)$$

と表される．このうち 16 乗して初めて 1 になる複素数の個数を n とし，それらを $z_1, z_2, \cdots\cdots, z_n$ とすると

$n=\boxed{}$

$z_1+z_2+\cdots\cdots+z_n=\boxed{}$

$z_1z_2\cdots\cdots z_n=\boxed{}$

$(1-z_1)(1-z_2)\cdots\cdots(1-z_n)=\boxed{}$

である．

高3理系数学　標準問題演習　演習　17.複素数平面(1)

$\boxed{11}$［Ⅰ．1999 京都教育大　Ⅱ．2018 早稲田大　Ⅲ．2016 芝浦工業大］

Ⅰ．$\alpha=\cos 72^\circ+i\sin 72^\circ$ とする．

(1)　$1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=0$ を示せ．

(2)　$u=\alpha+\alpha^4$，$v=\alpha^2+\alpha^3$ とおくとき，$u+v$ と uv の値を求めよ．

(3)　$\cos 72^\circ$ の値を求めよ．

Ⅱ．複素数 z は $z^7=1$ かつ $z\neq 1$ を満たす。z の偏角を θ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$ は ${}^{ア}\boxed{}$ である。

(2)　$\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 4\theta$ は $\dfrac{{}^{イ}\boxed{}}{{}^{ウ}\boxed{}}$ である。

Ⅲ．複素数 α を

$$\alpha=\cos\frac{2\pi}{5}+i\sin\frac{2\pi}{5}$$

とする。ただし，i は虚数単位とする。

(1)　$1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4$ の値を求めよ。

(2)　複素数 z について

$$(z-\alpha)(z-\alpha^2)(z-\alpha^3)(z-\alpha^4)=1+z+z^2+z^3+z^4$$

が成り立つことを示せ。

(3)　自然数 n について，$|1-\alpha^n|^2$ の値を $\sin\dfrac{n\pi}{5}$ を用いて表せ。

(4)　$\sin\dfrac{\pi}{5}\sin\dfrac{2\pi}{5}\sin\dfrac{3\pi}{5}\sin\dfrac{4\pi}{5}$ の値を求めよ。