

1.2 因数分解

(1) 因数分解

1つの整式を、1次以上の整式の積の形に表すことを、もとの式を因数分解するという。このとき、積を作っている各式を、もとの式の因数という。展開の公式を逆にみると、因数分解の公式が得られる。

因数分解の公式

0. $ma + mb = m(a + b)$ (共通因数をくくる)

1. $x^2 + (a + b)x + ab = (x + a)(x + b)$

2. $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

3. $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

4. $acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$ (たすきがけ)

5. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

そのままでは因数分解できない式でも、次のような工夫をすると、因数分解できることがある。

因数分解の工夫

1. まずは、共通因数をくくる。

2. 共通なものを1つのかたまりとみる (置き換える)。

3. 2種類以上の文字を含む式は、次数の低い文字に着目し、整理する。

例1

(1) 次の式を因数分解せよ。

$$2x^3 + 4x^2y - 6xy^2$$

(2) $2x^2 + 7x + 6$ を因数分解せよ。

(3) $a^6 - 7a^3 - 8$ を因数分解せよ。

解説

(1) (与式) $= 2x(x^2 + 2xy - 3y^2) = 2x(x + 3y)(x - y)$

(2) $acx^2 + (ad + bc)x + bd = (ax + b)(cx + d)$ のタイプの因数分解である。これを満たすような a, b, c, d をを見つけるために、たすきがけという方法を用いる。

$$\begin{array}{rcl}
 a & \searrow & b \longrightarrow bc \\
 c & \nearrow & d \longrightarrow ad \\
 \hline
 ac & bd & ad+bc
 \end{array}$$

まず x^2 の係数を 2 つの数の積になおし、それらを a, c とする。次に定数項を 2 つの数の積になおし、それらを b, d とする。そして、それらを上の図式のように並べ、交差するようにかけてそれらを足し、それが x の係数になるまで 2 つの数の積や配列を考える。このようにして求めた a, b, c, d を $(ax+b)(cx+d)$ の a, b, c, d に入ればよい。

$$\begin{aligned}
 2x^2 + 7x + 6 &= 1 \cdot 2x^2 + (3+4)x + 2 \cdot 3 \\
 &= (x+2)(2x+3)
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
 1 & \searrow & 2 \longrightarrow 4 \\
 2 & \nearrow & 3 \longrightarrow 3 \\
 \hline
 2 & 6 & 7
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \ a^6 - 7a^3 - 8 &= (a^3 - 8)(a^3 + 1) \\
 &= (a-2)(a^2+2a+4)(a+1)(a^2-a+1) \\
 &= (a+1)(a-2)(a^2-a+1)(a^2+2a+4)
 \end{aligned}$$

例2

(1) $x^3 + 2yx^2 - y^2x - 2y^3$ を因数分解せよ。

(2) 式 $x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ を因数分解せよ。

(3) 整式 $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 8$ を因数分解せよ。

解説

$$(1) \ x^3 + 2yx^2 - y^2x - 2y^3$$

$$= x^2(x+2y) - y^2(x+2y)$$

$$= (x+2y)(x^2 - y^2)$$

$$= (x+2y)(x+y)(x-y)$$

$$(2) \ x^3 + 2x^2 - 4x - 8$$

$$= x^2(x+2) - 4(x+2)$$

$$= (x+2)(x^2 - 4)$$

$$= (x+2)(x+2)(x-2)$$

$$= (x+2)^2(x-2)$$

$$(3) \ x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 8$$

$$= (x+y)^2 + 2(x+y) - 8$$

$$= \{(x+y)-2\}\{(x+y)+4\}$$

$$= (x+y-2)(x+y+4)$$

別解

$$\begin{aligned}
& x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 8 \\
&= x^2 + (2y+2)x + y^2 + 2y - 8 \\
&= x^2 + (2y+2)x + (y-2)(y+4) \\
&= \{x + (y-2)\}\{x + (y+4)\} \\
&= (x + y - 2)(x + y + 4)
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl}
1 & \times & y-2 \longrightarrow y-2 \\
1 & \times & y+4 \longrightarrow y+4 \\
\hline
& & 2y+2
\end{array}$$

例3

- (1) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24$ を因数分解せよ。
(2) $(x-3)(x-5)(x-7)(x-9) - 9$ を因数分解せよ。
(3) $x^4 + 4$ を因数分解せよ。
(4) 次の式を因数分解せよ。

$$x^4 + 3x^2 + 4$$

解法解説

$$\begin{aligned}
(1) & (x+1)(x+2)(x+3)(x+4) - 24 \\
&= (x+1)(x+4) \times (x+2)(x+3) - 24 \\
&= \{(x^2 + 5x) + 4\}\{(x^2 + 5x) + 6\} - 24 \\
&= (x^2 + 5x)^2 + 10(x^2 + 5x) + 24 - 24 \\
&= (x^2 + 5x)^2 + 10(x^2 + 5x) = (x^2 + 5x)\{(x^2 + 5x) + 10\} \\
&= x(x+5)(x^2 + 5x + 10) \\
(2) & (\text{与式}) = (x-3)(x-9) \times (x-5)(x-7) - 9 \\
&= \{(x^2 - 12x) + 27\}\{(x^2 - 12x) + 35\} - 9 \\
&= (x^2 - 12x)^2 + 62(x^2 - 12x) + 3^3 \cdot 35 - 3^2 \\
&= (x^2 - 12x)^2 + 62(x^2 - 12x) + 2^3 \cdot 3^2 \cdot 13 \\
&= (x^2 - 12x + 26)(x^2 - 12x + 36) \\
&= (x-6)^2(x^2 - 12x + 26)
\end{aligned}$$

別解 1

$A = x - 6$ とおくと

$$\begin{aligned}
(\text{与式}) &= (A+3)(A+1)(A-1)(A-3) - 9 \\
&= (A^2 - 1)(A^2 - 9) - 9 \\
&= A^4 - 10A^2 \\
&= A^2(A^2 - 10) \\
&= (x-6)^2\{(x-6)^2 - 10\}
\end{aligned}$$

$$=(x-6)^2(x^2-12x+26)$$

別解 2

$$(\text{与式})=(x-3)(x-9)\times(x-5)(x-7)-9$$

$$=\{x^2-12x+27\}\{x^2-12x+35\}-9$$

$$A=x^2-12x+27 \text{ とおくと}$$

$$=A(A+8)-9$$

$$=A^2+8A-9$$

$$=(A+9)(A-1)$$

$$=(x^2-12x+36)(x^2-12x+26)$$

$$=(x-6)^2(x^2-12x+26)$$

$$(3) x^4+4=(x^4+4x^2+4)-4x^2$$

$$=(x^2+2)^2-(2x)^2$$

$$=\{(x^2+2)+2x\}\{(x^2+2)-2x\}$$

$$=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$$

$$(4) x^4+3x^2+4=(x^4+4x^2+4)-x^2$$

$$=(x^2+2)^2-x^2$$

$$=(x^2+x+2)(x^2-x+2)$$

参考 (3), (4) のような因数分解を複 2 次式の因数分解という。

例 4

(1) $x^2z-2xyz-3y^2z-2x^2+4xy+6y^2$ を因数分解すると である。

(2) $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$ を因数分解すると である。

(3) 式 $a(b^2+c^2)+b(c^2+a^2)+c(a^2+b^2)+2abc$ を因数分解せよ。

解説

(1) z について整理して

$$(\text{与式})=(x^2-2xy-3y^2)z-2(x^2-2xy-3y^2)$$

$$=(x^2-2xy-3y^2)(z-2)$$

$$=(x+y)(x-3y)(z-2)$$

(2) $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

a について整理して

$$=(c-b)a^2+(b^2-c^2)a+bc^2-b^2c$$

$$=(c-b)a^2-(c+b)(c-b)a+bc(c-b)$$

$$=(c-b)\{a^2-(c+b)a+bc\}$$

$$=(c-b)(a-b)(a-c)$$

$$=(a-b)(b-c)(c-a)$$

別解 因数定理と対称式・交代式の性質を利用する。(読み飛ばしてよい)

$$P(a, b, c) = a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2) \text{ とおく}$$

$$P(b, a, c) = -P(a, b, c), P(a, c, b) = -P(a, b, c), P(c, b, a) = -P(a, b, c)$$

より, $P(a, b, c)$ は交代式であるから, $(a-b)(b-c)(c-a)$ を因数にもつ

また, $P(a, b, c)$ は 3 次式であるから

$$P(a, b, c) = k(a-b)(b-c)(c-a) \quad (k \text{ は定数})$$

とおける

$$P(1, -1, 0) = 2 \text{ より}$$

$$2k = 2 \quad \therefore k = 1$$

よって,

$$P(a, b, c) = (a-b)(b-c)(c-a)$$

補足

a, b 2 文字の交代式は $a-b$ を因数にもつ。

a, b, c 3 文字の交代式は $(a-b)(b-c)(c-a)$ を因数にもつという性質があることが知られている (証明は現段階ではできなくてよい)。

(本問であれば, $P(b, b, c) = 0$ であるから因数定理より

$P(a, b, c)$ は $a-b$ を因数にもつ

同様にして, $P(a, b, c)$ は $b-c, c-a$ を因数にもつ)

$$(3) \text{ (与式)} = ab^2 + ac^2 + bc^2 + a^2b + a^2c + b^2c + 2abc$$

$$= (b+c)a^2 + (b^2 + 2bc + c^2)a + b^2c + bc^2$$

$$= (b+c)a^2 + (b+c)^2a + bc(b+c)$$

$$= (b+c)\{a^2 + (b+c)a + bc\}$$

$$= (b+c)(a+b)(a+c)$$

$$= (a+b)(b+c)(c+a)$$

別解

$$P(a, b, c) = a(b^2 + c^2) + b(c^2 + a^2) + c(a^2 + b^2) + 2abc \text{ とおく}$$

$P(-b, b, c) = 0$ であるから因数定理より

$P(a, b, c)$ は $a+b$ を因数にもつ

同様にして, $P(a, b, c)$ は $b+c, c+a$ を因数にもつ

$P(a, b, c)$ は a, b, c についてそれぞれ 2 次式であるから

$$P(a, b, c) = k(a+b)(b+c)(c+a) \quad (k \text{ は定数})$$

とおける

$$P(1, 1, 0) = 2 \text{ より}$$

$$2k = 2 \quad \therefore k = 1$$

よって,

$$P(a, b, c) = (a + b)(b + c)(c + a)$$

〔注〕 $P(b, a, c) = P(a, b, c)$, $P(a, c, b) = P(a, b, c)$, $P(c, b, a) = P(a, b, c)$ より,
 $P(a, b, c)$ は対称式である。対称式については, a, b, c 3文字の対称式は
 $(a + b)(b + c)(c + a)$ を因数にもつというような性質はない。

例5

(1) $2x^2 + 3xy - 2y^2 - 3x - y + 1$ を因数分解せよ。

(2) $6x^2 + 7xy - 5y^2 - 11x + 12y - 7$ を因数分解すると である。

〔解説〕

$$(1) (\text{与式}) = 2x^2 + (3y - 3)x - (2y^2 + y - 1)$$

$$= 2x^2 + (3y - 3)x - (y + 1)(2y - 1)$$

$$= \{x + (2y - 1)\}\{2x - (y + 1)\}$$

$$= (x + 2y - 1)(2x - y - 1)$$

$$\begin{array}{rcl} 1 & \times & 1 \longrightarrow 2 \\ 2 & & -1 \longrightarrow -1 \\ \hline 2 & & -1 \qquad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 1 & \times & 2y - 1 \longrightarrow 4y - 2 \\ 2 & & -(y + 1) \longrightarrow -y - 1 \\ \hline 2 & & -(y + 1)(2y - 1) \qquad 3y - 3 \end{array}$$

〔別解〕

$$(\text{与式}) = (x + 2y)(2x - y) - 3x - y + 1$$

$$= \{(x + 2y) + k\}\{(2x - y) + l\} \text{ とおくと}$$

$$= (x + 2y)(2x - y) + l(x + 2y) + k(2x - y) + kl$$

$$= (x + 2y)(2x - y) + (2k + l)x + (-k + 2l)y + kl$$

ここで

$$\begin{cases} 2k + l = -3 \\ -k + 2l = -1 \end{cases}$$

となればよいから, $k = -1, l = -1$

よって

$$(\text{与式}) = (x + 2y - 1)(2x - y - 1)$$

$$(2) (\text{与式}) = 6x^2 + (7y - 11)x - (5y^2 - 12y + 7)$$

$$= 6x^2 + (7y - 11)x - (y - 1)(5y - 7)$$

$$= \{2x - (y - 1)\}\{3x + (5y - 7)\}$$

$$= (2x - y + 1)(3x + 5y - 7)$$

$$\begin{array}{rcl} 2 & \times & -(y - 1) \longrightarrow -3y + 3 \\ 3 & & 5y - 7 \longrightarrow 10y - 14 \\ \hline 6 & & -(y - 1)(5y - 7) \qquad 7y - 11 \end{array}$$

例6

$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ を示せ。

解説

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) \text{ より}$$

$$= (a + b)^3 - 3ab(a + b) + c^3 - 3abc$$

$$= (a + b)^3 + c^3 - 3ab(a + b + c)$$

$$= \{(a + b) + c\} \{(a + b)^2 - (a + b)c + c^2\} - 3ab(a + b + c)$$

$$= (a + b + c) \{(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - bc - ca) - 3ab\}$$

$$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$$

注 よく使うので，公式として覚えておいた方がよい。

補1

整式 $P = bc + b + c + 1$ を因数分解すると $P = \text{ア} \boxed{}$ である。さらに、
 整式 $Q = 2abc + bc + 2ca + 2ab + 2a + b + c + 1$ を因数分解すると Q
 $= \text{イ} \boxed{}$ である。

(解説)

$$\begin{aligned} (\text{ア}) \quad P &= bc + b + c + 1 \\ &= b(c + 1) + c + 1 \\ &= (b + 1)(c + 1) \end{aligned}$$

(イ) (ア) より

$$bc + b + c + 1 = (b + 1)(c + 1)$$

よって

$$\begin{aligned} Q &= 2abc + bc + 2ca + 2ab + 2a + b + c + 1 \\ &= 2a(bc + b + c + 1) + bc + b + c + 1 \\ &= (2a + 1)(bc + b + c + 1) \\ &= (2a + 1)(b + 1)(c + 1) \end{aligned}$$

補2

(1) $a^2 + (2b - 3)a - (3b^2 + b - 2)$ を因数分解せよ。

(2) 次の式を因数分解せよ。

$$ax^2 - (a^2 + 2a - 1)x - a - 2$$

(解説)

$$\begin{aligned} (1) \quad &a^2 + (2b - 3)a - (3b^2 + b - 2) \\ &= a^2 + (2b - 3)a - (b + 1)(3b - 2) \\ &= \{a + (3b - 2)\}\{a - (b + 1)\} \\ &= (a + 3b - 2)(a - b - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad &ax^2 - (a^2 + 2a - 1)x - a - 2 \\ &= ax^2 + (-a^2 - 2a + 1)x - (a + 2) \\ &= \{x - (a + 2)\}(ax + 1) \\ &= (x - a - 2)(ax + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{array}{rcl} 1 & \times & -(a+2) \longrightarrow -a^2 - 2a \\ a & & 1 \longrightarrow 1 \\ \hline a & & -(a+2) \longrightarrow -a^2 - 2a + 1 \end{array}$$

補3

(1) 次の式を因数分解せよ.

$$a^2b + ab^2 + a + b - ab - 1$$

(2) 次の式を因数分解せよ.

$$x^2y + 2xy^2 - x^2 + 4y^2 - xy - x - 6y + 2$$

解説

$$(1) a^2b + ab^2 + a + b - ab - 1$$

$$= ba^2 + (b^2 - b + 1)a + b - 1$$

$$= \{a + (b - 1)\}(ba + 1)$$

$$= (a + b - 1)(ab + 1)$$

別解

$$a^2b + ab^2 + a + b - ab - 1$$

$$= ab(a + b - 1) + (a + b - 1)$$

$$= (a + b - 1)(ab + 1)$$

$$(2) x^2y + 2xy^2 - x^2 + 4y^2 - xy - x - 6y + 2$$

$$= (y - 1)x^2 + (2y^2 - y - 1)x + 4y^2 - 6y + 2$$

$$= (y - 1)x^2 + (2y + 1)(y - 1)x + 2(2y - 1)(y - 1)$$

$$= (y - 1)\{x^2 + (2y + 1)x + 2(2y - 1)\}$$

$$= (y - 1)(x + 2)\{x + (2y - 1)\}$$

$$= (x + 2)(y - 1)(x + 2y - 1)$$

補4

(1) $x^2(y-1) + y^2(1-x) + x - y$ を因数分解せよ。

(2) 次の式を因数分解せよ。

$$x(x+1)(x+2) - y(y+1)(y+2) + xy(x-y)$$

(3) $x(y^3 - z^3) + y(z^3 - x^3) + z(x^3 - y^3)$ を因数分解せよ。

解説

$$\begin{aligned} (1) & x^2(y-1) + y^2(1-x) + x - y \\ &= xy(x-y) - (x^2 - y^2) + x - y \\ &= xy(x-y) - (x+y)(x-y) + (x-y) \\ &= (x-y)\{xy - (x+y) + 1\} \\ &= (x-y)(x-1)(y-1) \end{aligned}$$

別解 1

$$\begin{aligned} & x^2(y-1) + y^2(1-x) + x - y \\ &= (y-1)x^2 - (y^2-1)x + y(y-1) \\ &= (y-1)x^2 - (y+1)(y-1)x + y(y-1) \\ &= (y-1)\{x^2 - (y+1)x + y\} \\ &= (y-1)(x-1)(x-y) \\ &= (x-y)(x-1)(y-1) \end{aligned}$$

別解 2

$P(x, y) = x^2(y-1) + y^2(1-x) + x - y$ とおくと

$P(y, x) = -P(x, y)$ より, $P(x, y)$ は交代式である

$P(x, y)$ は 3 次式であるから

$$\begin{aligned} P(x, y) &= (x-y)\{k(x+y)^2 + lxy + m(x+y) + n\} \\ &\quad ((x-y)(2 \text{ 次の対称式})) \end{aligned}$$

とおいて, k, l, m, n を求めてもよいが, 大変である。

補足

対称式 $\times$ 対称式 = 対称式

対称式 $\times$ 交代式 = 交代式

交代式 $\times$ 交代式 = 対称式であるから,

$P(x, y)$ は交代式より, 交代式 $\times$ 対称式とおける。

2 番目に式だけ示すと,

$P(x, y)$ を対称式, $Q(x, y)$ を交代式とすると

$$P(y, x)Q(y, x) = P(x, y)\{-Q(x, y)\} = -P(x, y)Q(x, y)$$

であるから, $P(x, y)Q(x, y)$ は交代式である。他も同様

〔注〕同次式であれば項が限られるので、置く文字は少なく済む。

$$\begin{aligned}
 (2) & x(x+1)(x+2) - y(y+1)(y+2) + xy(x-y) \\
 &= x^3 - y^3 + 3(x^2 - y^2) + 2(x-y) + xy(x-y) \\
 &= (x-y)(x^2 + xy + y^2) + 3(x+y)(x-y) + (xy+2)(x-y) \\
 &= (x-y)\{x^2 + xy + y^2 + 3(x+y) + xy + 2\} \\
 &= (x-y)\{x^2 + (2y+3)x + y^2 + 3y + 2\} \\
 &= (x-y)\{x^2 + (2y+3)x + (y+1)(y+2)\} \\
 &= (x-y)(x+y+1)(x+y+2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) & x(y^3 - z^3) + y(z^3 - x^3) + z(x^3 - y^3) \\
 &= (z-y)x^3 - (z^3 - y^3)x + yz(z^2 - y^2) \\
 &= (z-y)x^3 - (z-y)(z^2 + zy + y^2)x + yz(z+y)(z-y) \\
 &= (z-y)\{x^3 - (z^2 + zy + y^2)x + yz(z+y)\} \\
 &= (z-y)\{(z-x)y^2 + z(z-x)y - x(z^2 - x^2)\} \\
 &= (z-y)\{(z-x)y^2 + z(z-x)y - x(z+x)(z-x)\} \\
 &= (z-y)(z-x)\{y^2 + zy - x(z+x)\} \\
 &= (z-y)(z-x)\{(y-x)z + (y^2 - x^2)\} \\
 &= (z-y)(z-x)\{(y-x)z + (y+x)(y-x)\} \\
 &= (z-y)(z-x)(y-x)\{z + (y+x)\} \\
 &= (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)
 \end{aligned}$$

〔別解〕

$$P(x, y, z) = x(y^3 - z^3) + y(z^3 - x^3) + z(x^3 - y^3) \text{ とおく}$$

$P(x, y, z)$ は交代式より, $(x-y)(y-z)(z-x)$ を因数にもつ
また, 4 次式より

$$P(x, y, z) = (x-y)(y-x)(z-x)k(x+y+z) \quad (k \text{ は定数})$$

とおける

$$P(1, 2, 0) = 6 \text{ より}$$

$$6k = 6 \quad \therefore k = 1$$

よって

$$P(x, y, z) = (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$$

補5

(1) $(x+1)(y+1)(xy+1)+xy$ を因数分解せよ。

(2) 次の式を因数分解せよ。

$$(x+y)(y+z)(z+x)+xyz$$

(3) $(a+b+c)(ab+bc+ca)-abc$ を因数分解せよ。

(4) $(a+b+c)^3-a^3-b^3-c^3$ を因数分解せよ。

(5) 多項式 $a^4+b^4+c^4-2a^2b^2-2a^2c^2-2b^2c^2$ を因数分解せよ。

解説

$$\begin{aligned} (1) & (x+1)(y+1)(xy+1)+xy \\ &= (xy+x+y+1)(xy+1)+xy \\ &= (y^2+y)x^2+(y^2+3y+1)x+y+1 \\ &= y(y+1)x^2+(y^2+3y+1)x+y+1 \\ &= \{yx+(y+1)\}\{(y+1)x+1\} \\ &= (xy+x+1)(xy+y+1) \end{aligned}$$

別解

$$\begin{aligned} & (x+1)(y+1)(xy+1)+xy \\ &= (xy+x+y+1)(xy+1)+xy \\ &= \{(xy+1)+x+y\}(xy+1)+xy \\ &= (xy+1)^2+(x+y)(xy+1)+xy \\ &= \{(xy+1)+x\}\{(xy+1)+y\} \\ &= (xy+x+1)(xy+y+1) \\ (2) & (x+y)(y+z)(z+x)+xyz \\ &= (y+z)\{x^2+(y+z)x+yz\}+xyz \\ &= (y+z)x^2+\{(y+z)^2+yz\}x+yz(y+z) \\ &= \{(y+z)x+yz\}\{x+(y+z)\} \\ &= (x+y+z)(xy+yz+zx) \\ (3) & (a+b+c)(ab+bc+ca)-abc \\ &= (b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+bc(b+c) \\ &= (b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c) \\ &= (b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\} \\ &= (b+c)(a+b)(a+c) \\ &= (a+b)(b+c)(c+a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4) & (a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 \\
&= \{a+(b+c)\}^3 - a^3 - b^3 - c^3 \\
&= a^3 + 3a^2(b+c) + 3a(b+c)^2 + (b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 \\
&= 3(b+c)a^2 + 3(b+c)^2a + 3bc(b+c) \\
&= 3(b+c)\{a^2 + (b+c)a + bc\} \\
&= 3(b+c)(a+b)(a+c) \\
&= 3(a+b)(b+c)(c+a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(5) & a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 \\
&= a^4 - 2(b^2 + c^2)a^2 + (b^2 - c^2)^2 \\
&= a^4 - 2(b^2 + c^2)a^2 + \{(b+c)(b-c)\}^2 \\
&= a^4 - 2(b^2 + c^2)a^2 + (b+c)^2(b-c)^2 \\
&= \{a^2 - (b+c)^2\}\{a^2 - (b-c)^2\} \\
&= \{a+(b+c)\}\{a-(b+c)\}\{a+(b-c)\}\{a-(b-c)\} \\
&= (a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)(a-b+c)
\end{aligned}$$

〔注〕すべて対称式の因数分解であるが，対称式には交代式のようなよい性質はないので，地道に計算するしかない。

例7

$(a-b)^3 + (b-c)^3 + (c-a)^3$ を因数分解せよ。

解説

$x = a - b, y = b - c$ とおくと, $c - a = -(x + y)$ より

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= x^3 + y^3 - (x + y)^3 \\ &= x^3 + y^3 - (x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3) \\ &= -3xy(x + y) \\ &= -3(a - b)(b - c)(a - c) \\ &= 3(a - b)(b - c)(c - a) \end{aligned}$$

別解 1

$x = a - b, y = b - c, z = c - a$ とおくと, $x + y + z = 0 \dots \textcircled{1}$

$$\begin{aligned} (\text{与式}) &= x^3 + y^3 + z^3 \\ x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \text{ より} \\ &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) + 3xyz \end{aligned}$$

$\textcircled{1}$ より

$$\begin{aligned} &= 3xyz \\ &= 3(a - b)(b - c)(c - a) \end{aligned}$$

別解 2

$P(a, b, c) = (a - b)^3 + (b - c)^3 + (c - a)^3$ とおく

$P(a, b, c)$ は交代式より, $(a - b)(b - c)(c - a)$ を因数にもつ

また, 3 次式より

$$P(a, b, c) = k(a - b)(b - c)(c - a) \quad (k \text{ は定数})$$

とおける

$P(1, 2, 0) = 6$ より

$$2k = 6 \quad \therefore k = 3$$

よって

$$P(a, b, c) = 3(a - b)(b - c)(c - a)$$