

2.6 解の配置問題

(1) 解の配置問題 (解の存在範囲)

方程式が、決められた範囲に、決められた個数だけ実数解をもつための条件を求める問題を、**解の配置問題**という。決められた個数だけであれば、判別式で求まるが、決められた範囲が加わると、グラフを利用して考えることが基本となる。

まずは、解の配置問題の基本となる**中間値の定理**について考える。

以降、 $f(x)=ax^2+bx+c$ とし、 $a>0$ ，すなわち $y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線の場合を考える。

中間値の定理

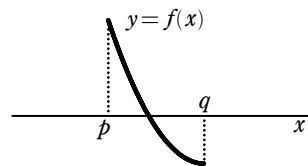
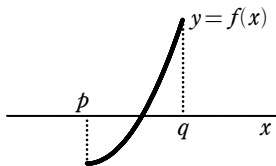
$p < q$ のとき、

(i) $f(p) < 0, f(q) > 0$ または (ii) $f(p) > 0, f(q) < 0$

(i), (ii) の両方が考えられる場合は、 $f(p)f(q) < 0$ ならば $f(x)=0$ が $p < x < q$ に 1 つの実数解をもつ

(i)

(ii)



$f(x)$ は 2 次関数であるから、連続 (グラフが切れずにつながっている) であり、 $f(p) < 0, f(q) > 0$ ($f(p) > 0, f(q) < 0$) であるから、 $f(x)$ は $p < x < q$ で $f(x)=0$ の値をとることができ、そのときの x が $f(x)=0$ の解である。また、放物線のグラフの形から、このときの x はただ 1 つである。

例1

2 次方程式 $x^2 - 2(a-1)x + (a-2)^2 = 0$ について、次の問いに答えよ。

(1) 実数解をもつ定数 a の値の範囲を求めよ。

(2) 2 つの解を α, β としたとき、 $0 < \alpha < 1 < \beta < 2$ となるような定数 a の値の範囲を求めよ。

解説

$$(1) x^2 - 2(a-1)x + (a-2)^2 = 0$$

判別式 D として、求める条件は、 $D \geq 0$ より

$$\frac{D}{4} = (a-1)^2 - (a-2)^2 = 2a - 3 \geq 0 \quad \therefore a \geq \frac{3}{2}$$

$$(2) f(x) = x^2 - 2(a-1)x + (a-2)^2 \text{ とおく.}$$

求める条件は、 $f(0) > 0$ かつ $f(1) < 0$ かつ $f(2) > 0$

$$f(0) = (a-2)^2 > 0 \quad \therefore a \text{ は } 2 \text{ 以外の実数}$$

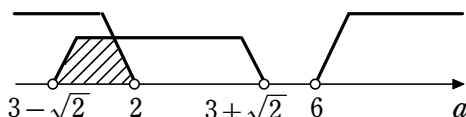
$$f(1) = 1 - 2(a-1) + (a-2)^2 = a^2 - 6a + 7 < 0 \quad \therefore 3 - \sqrt{2} < a < 3 + \sqrt{2}$$

$$f(2) = 4 - 4(a-1) + (a-2)^2 = a^2 - 8a + 12 = (a-2)(a-6)$$

$$\therefore a < 2, 6 < a$$

以上より

$$3 - \sqrt{2} < a < 2$$



例2

整数係数の2次関数 $y = ax^2 - (a+2)x - 1$ のグラフは x 軸と2つの共有点 $(\alpha, 0)$, $(\beta, 0)$ をもち、 $-1 < \alpha < 0$, $2 < \beta < 3$ を満たす。このとき、整数 a の値を定めよ。

(解説)

$$f(x) = ax^2 - (a+2)x - 1 \quad (a \neq 0) \text{ とする。}$$

$f(0) = -1 < 0$ であるから、 α , β についての条件を満たすには

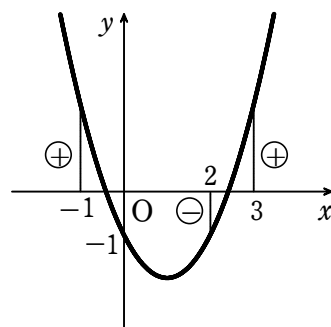
$$f(-1) > 0 \quad 2a + 1 > 0 \quad \therefore a > -\frac{1}{2}$$

$$f(2) < 0 \quad 2a - 5 < 0 \quad \therefore a < \frac{5}{2}$$

$$f(3) > 0 \quad 6a - 7 > 0 \quad \therefore a > \frac{7}{6}$$

$$\text{これらの共通部分を求めて、} \frac{7}{6} < a < \frac{5}{2}$$

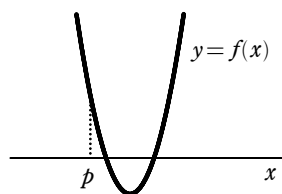
a は整数であるから、 $a = 2$



解の配置問題1

$f(x)=0$ が p より大きい異なる 2 解をもつ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D > 0 \text{ (実解条件)} \\ \text{軸} > p \text{ (軸の条件)} \\ f(p) > 0 \text{ (境界条件)} \end{cases}$$



→ はグラフより明らか。

← について,

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

$y=f(x)$ の頂点の x 座標を $x=q$ とすると,

軸の条件から $q > p$, 頂点は $\left(q, -\frac{D}{4a}\right)$

$D > 0$ より $f(q) < 0$, これと $f(p) > 0$ から, 中間値の定理より,

$f(x)=0$ は $p < x < q$ に 1 つの実数解をもつ。

また, グラフの形から $x > q$ において $f(x) > 0$ となるようにできるから,

その x の 1 つを $x=r$ ($r > q$) とすると $f(r) > 0$ で, これと $f(q) < 0$ から,

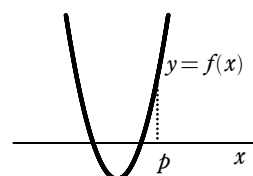
中間値の定理より, $f(x)=0$ は $q < x < r$ に 1 つの実数解をもつ。

以上より, $f(x)=0$ は p より大きい異なる 2 解をもつ。

解の配置問題2

$f(x)=0$ が p より小さい異なる 2 解をもつ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D > 0 \text{ (実解条件)} \\ \text{軸} < p \text{ (軸の条件)} \\ f(p) > 0 \text{ (境界条件)} \end{cases}$$

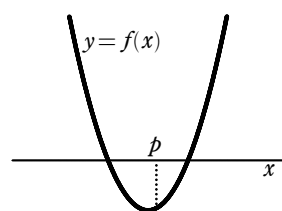


同様に示すことができる。

解の配置問題3

$f(x)=0$ が p より大きい解と p より小さい解
を 1 つずつもつ

$$\Leftrightarrow f(p) < 0$$



→はグラフより明らか。

←について、

グラフの形から、 $x > p, x < p$ において、それぞれ $f(x) > 0$ となるようにできるから、その x のそれぞれ1つを $x = q (q > p), x = r (r < p)$ とすると、 $f(q) > 0, f(r) > 0$

これと $f(p) < 0$ から、中間値の定理より、 $f(x) = 0$ は $r < x < p, p < x < q$ に1つずつ実数解をもつ。

よって、 $f(x) = 0$ が p より大きい解と、 p より小さい解を1つずつもつ。

例3

2次方程式 $x^2 - 2ax + a + 7 = 0$ について考える。次のものを求めよ。

- (1) 1より大きい2つの異なる解をもつための a の値の範囲
- (2) 1より小さい2つの異なる解をもつための a の値の範囲
- (3) 1より大きい解と1より小さい解とをもつための a の値の範囲

(解説)

(1) $f(x) = x^2 - 2ax + a + 7 = (x - a)^2 - a^2 + a + 7$ とおく。

$f(x) = 0$ が1より大きい2つの異なる解をもつとき

$f(x) = 0$ の判別式を D とすると

$$\text{実解条件 } \frac{D}{4} = a^2 - a - 7 > 0 \quad \therefore a < \frac{1 - \sqrt{29}}{2}, \frac{1 + \sqrt{29}}{2} < a$$

軸の条件 $a > 1$

境界条件 $f(1) > 0 \quad 1 - 2a + a + 7 > 0 \quad \therefore a < 8$

これらの共通部分をとって、 $\frac{1 + \sqrt{29}}{2} < a < 8$

(2) $f(x) = 0$ が1より小さい2つの異なる解をもつとき

実解条件 $D > 0$

軸の条件 $a < 1$

境界条件 $f(1) > 0$

これらの共通部分をとって、 $a < \frac{1 - \sqrt{29}}{2}$

(3) $f(x) = 0$ が1より大きい解と1より小さい解をもつとき

$f(1) < 0 \quad \therefore a > 8$

別解

(1) $x^2 - 2ax + a + 7 = 0$ の異なる 2 実解をもつとき、
判別式を D とすると $D > 0$ より

$$\frac{D}{4} = a^2 - (a + 7) = a^2 - a - 7 > 0 \quad \therefore a < \frac{1 - \sqrt{29}}{2}, a > \frac{1 + \sqrt{29}}{2}$$

このときの 2 解を α, β とすると、
解と係数の関係より

$$\alpha + \beta = 2a, \alpha\beta = a + 7$$

また、 $\alpha - 1 > 0, \beta - 1 > 0$ より

$$\begin{cases} (\alpha - 1) + (\beta - 1) > 0 \\ (\alpha - 1)(\beta - 1) > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a - 2 > 0 \\ (a + 7) - 2a + 1 > 0 \end{cases} \quad \therefore 1 < a < 8$$

よって、 $\frac{1 + \sqrt{29}}{2} < a < 8$

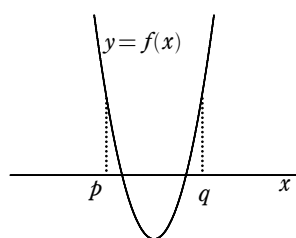
(2) $D > 0, (\alpha - 1) + (\beta - 1) < 0, (\alpha - 1)(\beta - 1) > 0$

(3) $(\alpha - 1)(\beta - 1) < 0$

解の配置問題4

$f(x) = 0$ が p より大きく q より小さい異なる
2 解をもつ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} D > 0 \text{ (実解条件)} \\ p < \text{軸} < q \text{ (軸の条件)} \\ f(p) > 0, f(q) > 0 \text{ (境界条件)} \end{cases}$$



→ はグラフより明らか。

← について、

$y = f(x)$ の頂点の x 座標を $x = r$ とする

軸の条件より、 $p < r < q$

$D > 0$ より、 $f(r) < 0$

$f(p) > 0, f(r) < 0, f(r) < 0, f(q) > 0$ であるから、中間値の定理より

$f(x) = 0$ は $p < x < r, r < x < q$ に 1 つずつ実数解をもつ。

よって、 $f(x) = 0$ は p より大きく q より小さい異なる 2 解をもつ。

例4

2 次方程式 $x^2 + ax + a = 0$ が異なる 2 つの実数解をもち、その絶対値が
いずれも 1 より小さい. このような実数 a の値の範囲を求めよ.

解説

判別式を D とし, $f(x) = x^2 + ax + a$ とおく.

求める条件は

$$\text{実解条件 } D > 0 \quad a^2 - 4a > 0 \quad \therefore a < 0, 4 < a$$

$$\text{軸の条件 } -1 < -\frac{a}{2} < 1 \quad \therefore -2 < a < 2$$

境界条件 $f(-1) > 0$ より, $1 > 0$ これは常に成り立つ

$$f(1) > 0 \text{ より, } 1 + 2a > 0 \quad \therefore a > -\frac{1}{2}$$

これらの共通部分をとると, $-\frac{1}{2} < a < 0$

例5

x に関する 2 次方程式 $x^2 - ax + 2 = 0$ (ただし, a は実数の定数) は範囲
 $I: -3 \leq x \leq -1$ で少なくとも 1 つの解をもつという. このときの a の
値の範囲を調べたい.

- (1) この方程式の 2 つの解が両方とも範囲 I に入る (重解が I に入るときも含む) とき, a の値の範囲を求めよ.
- (2) この方程式の 1 つの解は I に入り, もう 1 つの解が I に入らないとき, a の値の範囲を求めよ.
- (3) この方程式の少なくとも 1 つの解が I に入るとき, a の値の範囲を求めよ.

解説

(1) 方程式の判別式を D とし, $f(x) = x^2 - ax + 2$ とおく

$f(x) = 0$ の 2 つの解が両方とも範囲 I に入るとき

$$\text{実解条件 } D \geq 0 \quad a^2 - 8 \geq 0 \quad \therefore a \leq -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2} \leq a$$

$$\text{軸の条件 } -3 \leq \frac{a}{2} \leq -1 \quad \therefore -6 \leq a \leq -2$$

$$\text{境界条件 } f(-1) \geq 0 \quad a + 3 \geq 0 \quad \therefore a \geq -3$$

$$f(-3) \geq 0 \quad 3a + 11 \geq 0 \quad \therefore a \geq -\frac{11}{3}$$

これらの共通部分を求めて, $-3 \leq a \leq -2\sqrt{2}$

(2)(i) 方程式が $x = -3$ を解にもつとき, $a = -\frac{11}{3}$

このとき, $x^2 + \frac{11}{3}x + 2 = 0 \quad \therefore x = -3, -\frac{2}{3}$

もう1つの解が I に入らないから適する

$x = -1$ を解にもつとき, $a = -3$

このとき, $x^2 + 3x + 2 = 0 \quad \therefore x = -1, -2$

もう1つの解も I に入るから不適

(ii) $-3 < x < -1$ の範囲で1つの解をもち, $x < -3$, $-1 < x$ の範囲でもう1つの解をもつとき

$$f(-3)f(-1) < 0$$

$$(3a+11)(a+3) < 0 \quad \therefore -\frac{11}{3} < a < -3$$

(i), (ii)より, $-\frac{11}{3} \leq a < -3$

(3)(1), (2)より, $-\frac{11}{3} \leq a \leq -2\sqrt{2}$

【注】「 $p < x < q$ ($p \leq x \leq q$)にただ1つの解をもつ」, 「 $p < x < q$ ($p \leq x \leq q$)に少なくとも1つの解をもつ」というときは, 原則

(i) $x = p, q$ を解にもつ場合

(ii) $p < x < q$ に解をもつ場合

で場合分けをして, 満たす範囲を求める。

(ii)は $p < x < q$ に1つの解をもち, それ以外の範囲に他の解をもつ場合と, $p < x < q$ に2つの解(重解も含む)をもつ場合がある。前者の方は $x = p$ や $x = q$ を解に含む場合もあり, これらを含めて考えると数式で表すのが難しいので, このように場合分けをして考えるとよい。

他にも, 軸の位置で場合分けをする方法もあるが, 手間はそんなに変わらない。使える範囲は限られるが, 次の定数分離の方法は, 知っておくと便利である。

例6

2 次方程式 $x^2 - (k+4)x - \frac{k}{2} + 10 = 0$ …… ① が $1 \leq x \leq 4$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつための定数 k の値の範囲を次のようにして求める。

まず、① を変形すると、 $x^2 - 4x + 10 = kx + \frac{k}{2}$ となる。

放物線 $y = x^2 - 4x + 10$ …… ② の頂点の座標は $(\text{ア}\square, \text{イ}\square)$ で

ある。直線 $y = kx + \frac{k}{2}$ …… ③ は、 k の値にかかわらず、定点

$(\text{ウ}\square, \text{エ}\square)$ を通る。放物線 ② と直線 ③ が $1 \leq x \leq 4$ の範囲で

接するとき、定数 k の値は $k = \text{オ}\square$ である。

よって、求める定数 k の値の範囲は $\text{カ}\square$ である。

解説

$$y = x^2 - 4x + 10 = (x-2)^2 + 6$$

頂点の座標は、 $(\text{ア}2, \text{イ}6)$

$$y = kx + \frac{k}{2} = k\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

k の値にかかわらず、定点 $(\text{ウ}-\frac{1}{2}, \text{エ}0)$ を通る。

直線 ③ は定点 $(-\frac{1}{2}, 0)$ を通り

傾き k の直線である

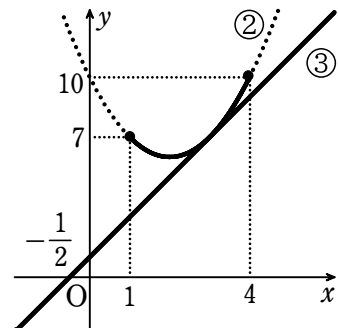
放物線 ② と直線 ③ が $1 \leq x \leq 4$ の範囲で接するとき、

2 次方程式 ① の判別式を D とすると、 $D=0$ より

$$\begin{aligned} D &= \{-(k+4)\}^2 - 4 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{k}{2} + 10\right) \\ &= k^2 + 10k - 24 = (k-2)(k+12) = 0 \end{aligned}$$

$1 \leq x \leq 4$ より、 $k = \text{オ}2$

放物線 ② と直線 ③ が $1 \leq x \leq 4$ の範囲で共有点をもつとき、直線 ③ の傾き k が最大となるのは、直線 ③ が点 $(1, 7)$ を通るときである。



$$\text{このとき, } 7 = k\left(1 + \frac{1}{2}\right) \quad \therefore k = \frac{14}{3}$$

①の実数解は、放物線②と直線③の共有点の x 座標に等しいから、放物線②と直線③が、共有点を少なくとも 1 つもつような k の値の範囲を求めればよい。

$$\text{よって, 求める定数 } k \text{ の値の範囲は, } 2 \leq k \leq \frac{14}{3}$$

☞ この方法は便利であるが、使える場面が限られる。この問題の場合、直線 $y = k\left(x + \frac{1}{2}\right)$ が常に $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ を通り、通る 1 点が定まっているから、 k を動かしたとき、直線の動きが追いややすいので、この方法が有効である。これが通る点と傾きの両方が動くとなると、この方法で解くのは困難になる。

例えば、例 1 のように、

$$x^2 - 2(a-1)x + (a-2)^2 = 0$$

定数分離して(定数がついている項を分けて)、

$$x^2 + 2x + 4 = 2ax - a^2 + 4a$$

$y = 2ax - a^2 + 4a = 2a\left(x - \frac{a}{2} + 2\right)$ は、常に通る点もなければ、傾きも定まっていないので、 a を動かしたとき、直線の動くが追いにいく、定数分離の方法で解くのは困難である。

補1

2 次方程式 $mx^2 - x - 2 = 0$ の 2 つの実数解が、それぞれ以下のようになるための m の条件を求めよ。

- (1) 2 つの解がともに -1 より大きい。
- (2) 1 つの解は 1 より大きく、他の解は 1 より小さい。
- (3) 2 つの解の絶対値がともに 1 より小さい。

解説

(1) 2 次方程式であるから、 $m \neq 0$ より

$$x^2 - \frac{1}{m}x - \frac{2}{m} = 0$$

判別式を D とし、 $f(x) = x^2 - \frac{1}{m}x - \frac{2}{m}$ とおく

$$\text{実解条件 } D \geq 0 \quad \frac{1}{m^2} + \frac{8}{m} \geq 0 \quad 8m + 1 \geq 0 \quad \therefore m \geq -\frac{1}{8}$$

$$\text{軸の条件 } \frac{1}{2m} > -1 \quad 2m^2 + m > 0 \quad \therefore m < -\frac{1}{2}, m > 0$$

$$\text{境界条件 } f(-1) > 0 \quad 1 - \frac{1}{m} > 0 \quad m^2 - m > 0 \quad \therefore m < 0, m > 1$$

これらの共通部分を求めて、 $m > 1$ 答

(2) $f(1) < 0$ より

$$1 - \frac{3}{m} < 0 \quad m^2 - 3m < 0 \quad \therefore 0 < m < 3 \quad \text{答}$$

(3) 実解条件 $D \geq 0$

$$\text{軸の条件 } -1 < \frac{1}{2m} < 1 \quad \therefore m < -\frac{1}{2}, m > \frac{1}{2}$$

境界条件 $f(-1) > 0$

$$f(1) > 0 \quad m < 0, m > 3$$

これらの共通部分を求めて、 $m > 3$ 答

定数分離で解いてもよい。

$$mx^2 - x - 2 = 0 \quad mx^2 = x + 2 \quad \therefore x^2 = \frac{1}{m}(x + 2)$$

の解は、 $y = x^2$ と $y = \frac{1}{m}(x + 2)$ の共有点の x 座標に等しい

$y = \frac{1}{m}(x + 2)$ は、常に $(-2, 0)$ を通る直線である。

補2

a を実数の定数とする。 x の2次方程式 $x^2+(a-1)x+a+2=0 \dots\dots ①$ について、次の値の範囲を求めよ。ただし、重解は1つと数える。

(1) ①が $0 \leq x \leq 2$ の範囲に実数解をただ1つもつとき、 a の値の範囲

(2) $-2 \leq a \leq -1$ のとき、 ①の実数解 x のとりうる値の範囲

解説

$$(1) x^2+(a-1)x+a+2=0$$

$$-x^2+x-2=a(x+1)$$

①の解は、 $y=-x^2+x-2$ と $y=a(x+1)$ の

共有点の x 座標に等しいから

これらが $0 \leq x \leq 2$ の範囲で共有点を1つもつときの a の値の範囲を求めればよい

$$y=-x^2+x-2=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{7}{4}$$

上に凸の放物線、頂点 $\left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{4}\right)$

$y=a(x+1)$ は、点 $(-1, 0)$ を通り、傾きが a の直線である

$y=-x^2+x-2$ と $y=a(x+1)$ が接するとき、

①が重解をもてばよいから、

判別式を D とすると、 $D=0$ より

$$D=(a-1)^2-4(a+2)=a^2-6a-7=0 \quad \therefore a=-1, 7$$

$y=a(x+1)$ が $(0, -2)$ を通るとき、 $a=-2$

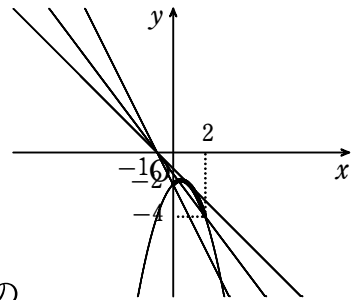
$$(2, -4) \text{ を通るとき, } a=-\frac{4}{3}$$

グラフより、 $-2 \leq a < -\frac{4}{3}, a=-1$

(2) $a=-2$ のとき、 ①の解は

$$x^2-3x=0 \quad \therefore x=0, 3$$

グラフより、 $0 \leq x \leq 3$



補3

x の 2 次方程式 $x^2 + (2-a)x + 4-2a=0$ …… ① が次の条件を満たすとき、 a の値の範囲を求めよ。

- (1) ① が異なる 2 つの実数解をもつ。
- (2) ① が $-1 \leq x \leq 1$ の範囲に少なくとも 1 つの実数解をもつ。

解説

$$(1) x^2 + (2-a)x + 4-2a=0$$

$$x^2 + 2x + 4 = a(x+2)$$

① の異なる実数解は、

$y = x^2 + 2x + 4$ と $y = a(x+2)$ の共有点の x 座標に等しい

$y = x^2 + 2x + 4$ と $y = a(x+2)$ が接するとき、

判別式を D とすると、 $D=0$ より

$$D = (2-a)^2 - 4(4-2a) = a^2 + 4a - 12 = 0 \quad \therefore a = -6, 2$$

$$y = x^2 + 2x + 4 = (x+1)^2 + 3$$

グラフは下に凸、頂点は $(-1, 3)$

$y = a(x+2)$ は点 $(-2, 0)$ を通り、傾きが a の直線

(1) グラフより

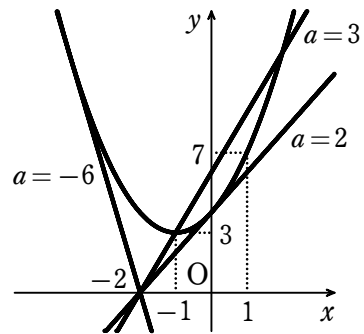
$$a < -6, 2 < a$$

(2) $y = a(x+2)$ が点 $(-1, 3)$ を通るとき

$$3 = a(-1+2) \quad \therefore a = 3$$

グラフより

$$2 \leq a \leq 3$$



補4

a を正の実数とし、 x についての 2 次方程式

$$2ax^2 - 2x + 4a - 1 = 0 \quad \dots\dots ①$$

を考える。

(1) 方程式 ① が $-\frac{1}{3} \leq x \leq 2$ の範囲にただ 1 つの解をもつ (ただし、重解は除く)。このとき a の値の範囲を求めよ。

(2) 方程式 ① が $-\frac{1}{3} \leq x \leq 2$ の範囲に少なくとも 1 つの解をもつ。このとき a の値の範囲を求めよ。

解説

$$(1) 2ax^2 - 2x + 4a - 1 = 0$$

$$2a(x^2 + 2) = 2x + 1$$

$$\therefore x^2 + 2 = \frac{1}{a} \left(x + \frac{1}{2} \right)$$

①の解は、 $y = x^2 + 2$ と $y = \frac{1}{a} \left(x + \frac{1}{2} \right)$ の共有点の x 座標に等しいから、

これらが $-\frac{1}{3} \leq x \leq 2$ の範囲に共有点をただ1つもつときの a の値の範囲

を求めればよい

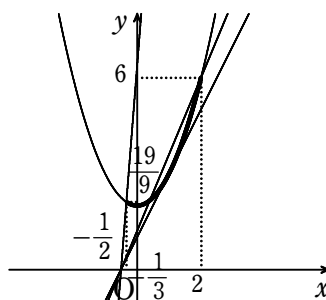
$$y = x^2 + 2$$

グラフは下に凸、頂点は $(0, 2)$

$y = \frac{1}{a} \left(x + \frac{1}{2} \right)$ は、点 $\left(-\frac{1}{2}, 0 \right)$ を通り、

傾き $\frac{1}{a}$ の直線である

$y = x^2 + 2$ と $y = \frac{1}{a} \left(x + \frac{1}{2} \right)$ が接するとき、



①の判別式を D として、 $D = 0$ より

$$\frac{D}{4} = 1 - 2a(4a - 1) = -8a^2 + 2a + 1 = 0 \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

$y = \frac{1}{a} \left(x + \frac{1}{2} \right)$ が $\left(-\frac{1}{3}, \frac{19}{9} \right)$ を通るとき、 $\frac{1}{a} = \frac{38}{3} \quad \therefore a = \frac{3}{38}$

$y = \frac{1}{a} \left(x + \frac{1}{2} \right)$ が $(2, 6)$ を通るとき、 $\frac{1}{a} = \frac{12}{5} \quad \therefore a = \frac{5}{12}$

グラフより

$$\frac{3}{38} \leq a < \frac{5}{12}$$

(2) グラフより

$$\frac{3}{38} \leq a \leq \frac{1}{2}$$