

高3数学 標準問題演習 演習 8. 三角関数

1 [2010 防衛医科大学校]

α を第2象限, β を第3象限の角とする。 $\sin \alpha = \frac{7}{25}$, $\cos \beta = -\frac{4}{5}$ のとき, $\alpha + 2\beta$ は第何象限の角か。

2 [I. 同志社大 II. 和歌山大 III. 工学院大 IV. 関西学院大 V. 龍谷大]

I. $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = \frac{11}{16}$ のとき, $\sin \theta$, $\cos \theta$ の値を求めよ。

II. $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{1}{2}$, $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{1}{3}$ のとき, 次の問いに答えよ。

(1) $\cos(\alpha - \beta)$ の値を求めよ。

(2) 一般に, 次の式が成り立つことを示せ。

$$\cos 2x + \cos 2y = 2 \cos(x+y) \cos(x-y)$$

(3) $\cos(\alpha + \beta)$ の値を求めよ。

III. $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$, $0^\circ \leq \beta \leq 90^\circ$ で $\sin \alpha + \cos \beta = \frac{5}{4}$, $\cos \alpha + \sin \beta = \frac{5}{4}$ のとき, $\sin(\alpha + \beta)$, $\tan(\alpha + \beta)$ の値を求めよ。

IV. 2次方程式 $x^2 - 2x - 5 = 0$ の2つの解が $\tan \alpha$, $\tan \beta$ であるとき, $\tan(\alpha + \beta)$ の値は⁷, $\cos^2(\alpha + \beta)$ の値は¹である。

V. 次の2つの等式 $\tan(x+y) = \frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}$, $\tan x + \tan y = 1 + \sqrt{3}$ を満たす x , y を求めよ。ただし, $0 < x < \frac{\pi}{2}$, $0 < y < \frac{\pi}{2}$ とする。

3 [岐阜大]

すべての実数 x に対して, $\cos(x+\alpha) + \sin(x+\beta) + \sqrt{2} \cos x$ が一定になるような α, β を求めよ。ただし, $0 < \alpha < 2\pi$, $0 < \beta < 2\pi$ とする。

高3数学 標準問題演習 演習 8. 三角関数

4 [2019 神戸大]

m, n を $0 < m < n$ を満たす整数とする。 α, β を $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, 0 < \beta < \frac{\pi}{2}, m = \tan \alpha, n = \tan \beta$ を満たす実数とする。

- (1) $\tan \frac{7\pi}{12}$ の値を求めよ。
- (2) $\alpha + \beta > \frac{7\pi}{12}$ であることを示せ。
- (3) $\tan(\alpha + \beta)$ が整数となるような組 (m, n) をすべて求めよ。

5 [I. 2006 横浜国立大 II. 1996 京都大 III. 2007 岩手大]

I. $\theta = \frac{360^\circ}{7}$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\cos 3\theta = \cos 4\theta$ であることを示せ。
- (2) $\cos \theta, \cos 2\theta, \cos 3\theta$ が解となるような、係数がすべて整数である x の3次方程式を求めよ。
- (3) $(1 + 4\cos^2 \theta)(1 + 4\cos^2 2\theta)(1 + 4\cos^2 3\theta)$ を求めよ。

II. (1) $\cos 5\theta = f(\cos \theta)$ を満たす多項式 $f(x)$ を求めよ。

- (2) $\alpha = 18^\circ$ とするとき、 $\cos \alpha \cos 3\alpha \cos 7\alpha \cos 9\alpha = \frac{5}{16}$ を示せ。

III. (1) $\sin \frac{\pi}{12}$ と $\sin \frac{5}{12}\pi$ が方程式 $16x^4 - 16x^2 + 1 = 0$ の解であることを示せ。

- (2) 不等式 $x^2 + y^2 \leq 1, 16x^4 - 16x^2 + 1 \leq 0$ を同時に満たす領域の面積を求めよ。

6 [2013 茨城大]

- (1) $\sin 2x = \cos x$ を満たす x を $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において求めよ。
- (2) $\cos 3x$ を $\cos x$ を用いて表せ。
- (3) a, b は実数とする。 $\cos 3x - a \sin 2x + b \cos x = 0$ を満たす x が $0 < x < \frac{\pi}{2}$ において2個あるような a, b の条件を求めて、 ab 平面上に図示せよ。

高3数学 標準問題演習 演習 8. 三角関数

7 [2009 弘前大]

次の不等式の表す領域を図示せよ。

$$|x| \leq \pi, |y| \leq \pi, \sin(x+y) - \sqrt{3} \cos(x+y) \geq 1$$

8 [2009 熊本大]

a, b を定数とし、 $a > b$ を満たすものとする。

$$f(x) = a \cos^2 x + \sqrt{3}(a-b) \cos x \sin x + b \sin^2 x$$

とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の最大値が 6, 最小値が 2 となるときの a, b を求めよ。
- (2) (1) で求めた a, b に対して、 $f(x)$ を考える。 $0 \leq x \leq \pi$ のとき、 $f(x) > 5$ となる x の範囲を求めよ。

9 [2007 高知大]

a は定数とする。

$$f(\theta) = a(\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta) - (\sqrt{3} \sin 2\theta + \cos 2\theta) + a + 1$$

について、次の問いに答えよ。ただし、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。

- (1) $\sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta$ を $r \sin(\theta + \alpha)$ の形に変形せよ。ただし、 $r > 0$ とする。
- (2) 関数 $y = \sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta$ のグラフの概形をかけ。
- (3) $t = \sqrt{3} \sin \theta - \cos \theta$ とおくと、 $f(\theta)$ は次のように表されることを示せ。

$$f(\theta) = t^2 + at + a - 1$$

- (4) 方程式 $f(\theta) = 0$ が相異なる 3 つの実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。

10 [2009 首都大学東京]

実数 x は $-\pi < x < \pi$ の範囲を動くとする。このとき、関数 $f(x) = \frac{1 + \sin x}{3 + \cos x}$ について、

次の問いに答えよ。

- (1) $t = \tan \frac{x}{2}$ として、等式 $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ を示せ。
- (2) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

高3数学 標準問題演習 演習 8. 三角関数

11 [I . 2005 京都大 II . 1997 滋賀医科大]

I . 角 α, β, γ が $\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ, \alpha \geq 0^\circ, \beta \geq 0^\circ, \gamma \geq 0^\circ$ を満たすとき,

$$\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \geq 1$$

を示せ。

II . A, B, C を三角形の内角とする. このとき, 次のことを証明せよ.

(1) $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \leq \frac{1}{2} \left(1 - \sin \frac{C}{2} \right)$

(2) $\sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$

(3) $\sin A + \sin B + \sin C \geq 4 \sin A \sin B \sin C$

(4) 三角形の外接円と内接円の半径をそれぞれ R, r とすると, $R \geq 2r$ であり, 等号は正三角形のときにのみ成り立つ.