発展問題演習 14. 積分法

[1]

(1) 解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha+\beta-1=-a \\ \alpha\beta-\beta-\alpha=b \\ -\alpha\beta=-c \end{cases}$$

$\therefore a=1-(\alpha+\beta),\ b=\alpha\beta-(\alpha+\beta),\ c=\alpha\beta$ //

(2) $\alpha^2+\beta^2=1$ より

$(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1$

$(1-a)^2-2\alpha\beta=1$

$2\alpha\beta=a^2-2a \quad \therefore \alpha\beta=\dfrac{a^2-2a}{2}$

よって

$c=\dfrac{a^2-2a}{2}$ //

(3) $b=\dfrac{a^2-2a}{2}-(1-a)=\dfrac{a^2-2}{2}$

$f(x)=x^3+ax^2+\dfrac{a^2-2}{2}x+\dfrac{a^2-2a}{2}$

$f(x)=0$ とすると

$$\begin{array}{r|rrrr} -1 & 2 & 2a & a^2-2 & a^2-2a \\ & & -2 & -2a+2 & -a^2+2a \\ \hline & 2 & 2a-2 & a^2-2a & 0 \end{array}$$

$2x^3+2ax^2+(a^2-2)x+a^2-2a=0$

$(x+1)\{2x^2+2(a-1)x+a^2-2a\}=0$

$-1, \alpha, \beta$ は相異なる3実解であるから

$2x^2+2(a-1)x+a^2-2a=0$ の判別式をDとすると

$$\begin{cases} 2-2(a-1)+a^2-2a\neq 0 \\ D/4>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-4a+4\neq 0 \quad \therefore a\neq 2 \\ (a-1)^2-2(a^2-2a)>0 \end{cases}$$

$-a^2+2a+1>0$

$a^2-2a-1<0 \quad \therefore 1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$

$\int_{-1}^{1}f(x)dx=\int_{-1}^{1}\{x^3+ax^2+\dfrac{a^2-2}{2}x+\dfrac{a^2-2a}{2}\}dx$

$=2\int_0^1(ax^2+\dfrac{a^2-2a}{2})dx$

$=\int_0^1\{2ax^2+(a^2-2a)\}dx$

$=\left[\dfrac{2a}{3}x^3+(a^2-2a)x\right]_0^1$

$=a^2-\dfrac{4}{3}a$

$=(a-\dfrac{2}{3})^2-\dfrac{4}{9}$

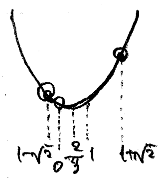
$a=2$ のとき $\int_{-1}^{1}f(x)dx=\dfrac{4}{3}$

グラフより

$2+\dfrac{2\sqrt{2}}{3}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{4}{9}$

$-\dfrac{4}{9}\leqq\int_{-1}^{1}f(x)dx<(\sqrt{2}+\dfrac{1}{3})^2-\dfrac{4}{9}$

$\qquad\qquad = \dfrac{5+2\sqrt{2}}{3}$ //



$,\ \int_{-1}^{1}f(x)dx\neq\dfrac{4}{3}$

[2]

I. (1) $a_1=\int_0^1 f_1(x)dx$

$=\int_0^1(2x+1)dx$

$=\left[\dfrac{(2x+1)^2}{4}\right]_0^1=2$ //

(2) $a_{n+1}=\int_0^1 f_{n+1}(x)dx$

$=\int_0^1(f_1(x)+\dfrac{1}{3}a_n)dx$

$=2+\dfrac{1}{3}a_n$ //

(3) $a_{n+1}-3=\dfrac{1}{3}(a_n-3)$ $\qquad \alpha=\dfrac{1}{3}\alpha+2 \quad \therefore \alpha=3$

$\{a_n-3\}$ は初項 $a_1-3=-1$ 公比 $\dfrac{1}{3}$ の等比数列より

$a_n-3=-(\dfrac{1}{3})^{n-1}$

$\therefore a_n=3-(\dfrac{1}{3})^{n-1}$ //

II. $f_{n+1}(x)=6x\int_0^1 f_n(t)dt-2\int_0^1 t f_n(t)dt$

$a_n=\int_0^1 f_n(t)dt$ …①, $b_n=\int_0^1 t f_n(t)dt$ …② とおくと

$\therefore f_{n+1}(x)=6a_nx-2b_n$

①より

$a_{n+1}=\int_0^1 f_{n+1}(t)dt$

$=\int_0^1(6a_nt-2b_n)dt$

$=3a_n-2b_n$ …③

②より

$b_{n+1}=\int_0^1 t f_{n+1}(t)dt$

$=\int_0^1(6a_nt^2-2b_nt)dt$

$=2a_n-b_n$ …④ $\qquad a_1=\int_0^1 2dt=2$

③−④より $\qquad b_1=\int_0^1 2t\,dt=1$

$a_{n+1}-b_{n+1}=a_n-b_n$

$\{a_n-b_n\}$ は初項 $a_1-b_1=1$ の定数列より

$a_n-b_n=1. \quad \therefore b_n=a_n-1$

よって

$a_{n+1}=a_n+2$

$\{a_n\}$は初項 $a_1=2$

公差2の等差数列より

$a_n=2n$ ∴ $b_n=2n-1$

したがって

$f_n(x)=6a_{n-1}x-2b_{n-1}$ $(n\geq 2)$

$=\{2(n-1)\}x-2(2n-3)$

これを$n=1$のときも満たすので

$f_n(x)=\{2(n-1)\}x-2(2n-3)$ //

III. (1) $x^2f_2(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\int_0^x t(-\frac{1}{2}t+2)\,dt$

$=\frac{5}{6}x^3+\frac{5}{2}x^2$

∴ $f_2(x)=\frac{5}{6}x+\frac{5}{2}$

$x^2f_3(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\int_0^x t(\frac{5}{6}t+\frac{5}{2})\,dt$

$=\frac{17}{18}x^3+\frac{11}{4}x^2$

∴ $f_3(x)=\frac{17}{18}x+\frac{11}{4}$

(2) (i) $n=1$のとき成り立つ

(ii) $n=k$ $(k=1,2,\cdots)$のとき成り立つと仮定して

$f_n(x)=a_nx+b_n$

$n=k+1$のとき成り立つことを示す

$x^2f_{n+1}(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\int_0^x t(a_nt+b_n)\,dt$

$=(\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3})x^3+(\frac{1}{2}b_n+\frac{3}{2})x^2$

∴ $f_{n+1}(x)=(\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3})x+(\frac{1}{2}b_n+\frac{3}{2})$

よって成り立つ。

(i), (ii)から数学的帰納法より

題意は示された□

(3) (2)より

$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}$ 　 $a_1=\frac{1}{2}$

$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{3}{2}$ 　 $b_1=2$.

$a_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{2}{3}$ 　 $\alpha=\frac{1}{3}\alpha+\frac{2}{3}$ ∴ $\alpha=1$

$a_{n+1}-1=\frac{1}{3}(a_n-1)$

$\{a_n-1\}$は初項 $a_1-1=-\frac{1}{2}$

公比$\frac{1}{3}$の等比数列より

$a_n-1=-\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{3})^{n-1}$

∴ $a_n=1-\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^{n-1}$

$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{3}{2}$ 　 $\beta=\frac{1}{2}\beta+\frac{3}{2}$ ∴ $\beta=3$

$b_{n+1}-3=\frac{1}{2}(b_n-3)$

$\{b_n-3\}$は初項 $b_1-3=-1$

公比$\frac{1}{2}$の等比数列より

$b_n-3=-1\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}$

∴ $b_n=3-(\frac{1}{2})^{n-1}$

よって

$f_n(x)=\{1-\frac{1}{2}(\frac{1}{3})^{n-1}\}x+3-(\frac{1}{2})^{n-1}$ //

[3]

I. (1) $f(x)=kx(x-1)(x-a)$ とおける

$=k\{x^3-(a+1)x^2+ax\}$

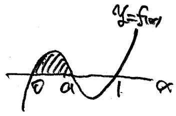
$f'(x)=k\{3x^2-2(a+1)x+a\}$

$f'(0)=a(1-a)$ より

$ak=a(1-a)$

∴ $k=1-a$ $(a\neq 0)$

(>0)



$S(a)=(1-a)\int_0^a x(x-1)(x-a)\,dx$

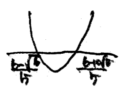
$=(1-a)\int_0^a\{x^2(x-a)-x(x-a)\}\,dx$

$=(1-a)\{-\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{6}a^3\}$

$=\frac{a^5}{12}-\frac{a^4}{4}+\frac{a^3}{6}$ //

(2) $S'(a)=\frac{5}{12}a^4-a^3+\frac{a^2}{2}$

$=\frac{a^2}{12}(5a^2-12a+6)$



$S'(a)=0$ とすると $a=\frac{6\pm\sqrt{6}}{5}$

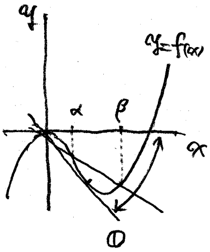
a	0		$\frac{6-\sqrt{6}}{5}$		1
$S'(a)$		+	0	−	
$S(a)$		↗	極大	↘	

$S(a)$は $a=\frac{6-\sqrt{6}}{5}$ のとき 極大

となる //

II. (1) $f(x)=x^3-x^2$ とする

$f'(x)=3x^2-2x$



$y=f(x)$ の $x=t$ における接線は

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

$y-(t^3-t^2)=(3t^2-2t)(x-t)$

∴ $y=(3t^2-2t)x-2t^3+t^2$

これが $(0,0)$ を通るとき

$-2t^3+t^2=0$

$t^2(2t-1)=0$ ∴ $t=0, \frac{1}{2}$

① は $y=-\frac{1}{4}x$

よって求める m の範囲は

$-\frac{1}{4}<m<0$ //

(2) 2つの交点の x 座標を α, β $(\alpha<\beta)$ とすると C と ℓ で囲まれる部分の面積 S は

$S=\int_0^\alpha \{(x^3-x^2)-mx\}dx+\int_\alpha^\beta \{mx-(x^3-x^2)\}dx$

$=\int_0^\alpha x(x-\alpha)(x-\beta)dx-\int_\alpha^\beta x(x-\alpha)(x-\beta)dx$

$=\int_0^\alpha \{x^2(x-\alpha)-\beta x(x-\alpha)\}dx$

$-\int_\alpha^\beta \{(x-\alpha)(x-\beta)^2+\beta(x-\alpha)(x-\beta)\}dx$

$=-\frac{1}{12}\alpha^4+\frac{1}{6}\alpha^3\beta-\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4+\frac{1}{6}\beta(\beta-\alpha)^3$

$=\frac{1}{12}\{\alpha^3(2\beta-\alpha)+(\beta-\alpha)^3\overbrace{\{2\beta-(\beta-\alpha)\}}^{\alpha+\beta}\}$

解と係数の関係から

$\alpha+\beta=1$, $\alpha\beta=-m$ より

$=\frac{1}{12}\{\alpha^3(2-3\alpha)+(1-2\alpha)^3\}$

$=\frac{1}{12}(-3\alpha^4-6\alpha^3+12\alpha^2-6\alpha+1)$, $0<\alpha<\frac{1}{2}$

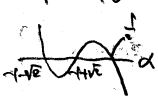
$f(\alpha)=-3\alpha^4-6\alpha^3+12\alpha^2-6\alpha+1$ とおくと

$f'(\alpha)=-12\alpha^3-18\alpha^2+24\alpha-6$

$=-6(2\alpha^3+3\alpha^2-4\alpha+1)$

$\frac{1}{2}$	2	3	−4	1
		1	2	−1
	2	4	−2	0

$=-6(2\alpha-1)(\alpha^2+2\alpha-1)$



$f'(\alpha)=0$ とすると $\alpha=0, -1\pm\sqrt{2}$

α	0		$-1+\sqrt{2}$		$\frac{1}{2}$
$f'(\alpha)$		−	0	+	
$f(\alpha)$		↘	極小	↗	

S は $\alpha=-1+\sqrt{2}$ のとき最小

このとき

$\beta=1-\alpha=2-\sqrt{2}$

$m=-\alpha\beta=-(-1+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})$

$=-\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)^2=-\sqrt{2}(3-2\sqrt{2})=4-3\sqrt{2}$ //

(3) このとき

$S=\frac{1}{12}\{(\alpha^2+2\alpha-1)(-3\alpha^2+9)-24\alpha+10\}$

$=-2\alpha+\frac{5}{6}$

$=-2(-1+\sqrt{2})+\frac{5}{6}=\frac{17}{6}-2\sqrt{2}$ //

[4]

I. (1) (i) $x\leqq 0$ のとき

$|t|=-t$ より

$f(x)=3\int_{x-1}^x 0\,dt=0$

(ii) $x-1<0<x$ すなわち $0<x<1$ のとき

$f(x)=\int_{x-1}^0 0\,dt+3\int_0^x 2t(2t-1)dt$

$=6\left[\frac{2}{3}t^3-\frac{t^2}{2}\right]_0^x$

$=4x^3-3x^2=x^2(4x-3)$

(iii) $x\geqq 1$ のとき

$f(x)=3\int_{x-1}^x 2t(2t-1)dt$

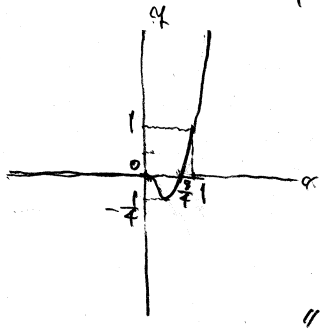
$=6\left[\frac{2}{3}t^3-\frac{t^2}{2}\right]_{x-1}^x$

$=4\{x^3-(x-1)^3\}-3\{x^2-(x-1)^2\}$

$=4(3x^2-3x+1)-3(2x-1)$

$=12x^2-18x+7=12(x-\frac{3}{4})^2+\frac{1}{4}$

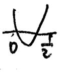
(2)



$0<x<1$ のとき

$f'(x)=12x^2-6x$

$=6x(2x-1)$



$f'(x)=0$ とすると $x=0, \frac{1}{2}$

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(x)$		−	0	+	
$f(x)$		↘	極小	↗	

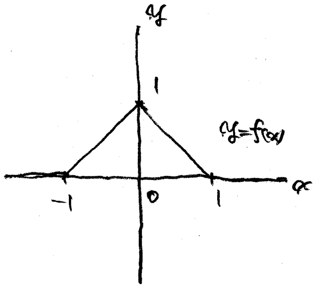
//

$x=\frac{1}{2}$ で極小 極小値 $f(\frac{1}{2})$

$=-\frac{1}{4}$

(3) $f(x)$ の最小値は $-\frac{1}{4}$ //

Ⅱ (1)

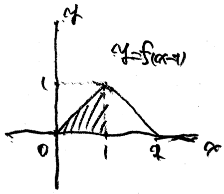


//

(2) $g(1)=\int_0^1 f(t-1)\,dt$

$=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$ //

(斜線部の面積)

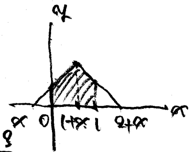


(3) (i) $x\leqq -2$ のとき $g(x)=0$

(iii) $-1<x<0$ のとき

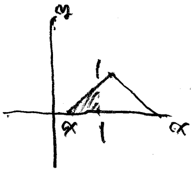
$g(x)=1-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}(1+x)^2$

$=-x^2-x+\frac{1}{2}=-(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$



(iv) $0\leqq x<1$ のとき

$g(x)=\frac{1}{2}(1-x)^2=\frac{1}{2}(x-1)^2$



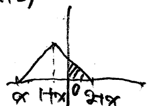
(v) $x\geqq 1$ のとき

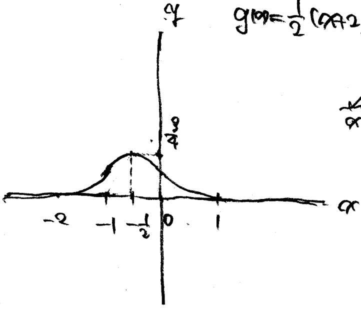
$g(x)=0$

(i)〜(v) より

(ii) $-2<x\leqq -1$ のとき

$g(x)=\frac{1}{2}(x+2)^2$





//

5

(1) $f(x)=x(x+1)(x-4)$

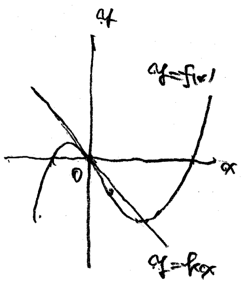
$=x^3-3x^2-4x$

$f'(x)=3x^2-6x-4$

$f'(0)=-4$

グラフより

$k>-4$ //



(2) $y=f(x)$ と $y=kx$ の共有点の x 座標を α,β $(\alpha<0<\beta)$ とする

2つの領域の面積が一致するとすれば

$\int_\alpha^0\{x(x+1)(x-4)-kx\}dx=\int_0^\beta\{kx-x(x+1)(x-4)\}dx$

$\int_\alpha^\beta x\{x^2-3x-(k+4)\}dx=0$

$\int_\alpha^\beta x(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=0$

$\int_\alpha^\beta\{(x-\alpha)(x-\beta)^2+\beta(x-\alpha)(x-\beta)\}dx=0$

$\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^4-\frac{\beta}{6}(\beta-\alpha)^3=0$

$\beta-\alpha-2\beta=0$ ∴ $\alpha+\beta=0$ …①

解と係数の関係より ($x^2-3x-(k+4)=0$ の2解が α,β)

$\alpha+\beta=3$ …②

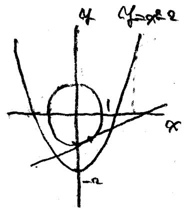
①, ② を同時に満たす α,β は存在しないので矛盾

よって2つの領域の面積が一致することはない //

6

(1) $(\cos\theta)x+(\sin\theta)y=1$ //

(2) $y=-\frac{1}{\tan\theta}x+\frac{1}{\sin\theta}$ $(\theta\neq\frac{3\pi}{2})$



$x^2-2=-\frac{1}{\tan\theta}x+\frac{1}{\sin\theta}$ として

$x^2+\frac{1}{\tan\theta}x-\frac{1}{\sin\theta}-2=0$

∴ $x=\frac{-\frac{1}{\tan\theta}\pm\sqrt{\frac{1}{\tan^2\theta}+4(\frac{1}{\sin\theta}+2)}}{2}=\alpha,\beta$ とおく $(\alpha<\beta)$

$S=\int_\alpha^\beta\{-\frac{1}{\tan\theta}x+\frac{1}{\sin\theta}-(x^2-2)\}dx$

$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

$=\frac{1}{6}\{\sqrt{\frac{1}{\tan^2\theta}+\frac{4}{\sin\theta}+8}\}^3$

$=\frac{1}{6}\{\sqrt{\frac{\cos^2\theta+4\sin\theta+8\sin^2\theta}{\sin^2\theta}}\}^3$

$=\frac{1}{6}\{\sqrt{\frac{7\sin^2\theta+4\sin\theta+1}{\sin^2\theta}}\}^3$

$=\frac{1}{6}\{\sqrt{\frac{1}{\sin^2\theta}+\frac{4}{\sin\theta}+7}\}^3$

$=\frac{1}{6}\{\sqrt{(\frac{1}{\sin\theta}+2)^2+3}\}^3$ //

$\theta=\frac{3\pi}{2}$ のとき

$S=\int_{-1}^1\{1-(x^2-2)\}dx$

$=\frac{2^3}{6}=\frac{4}{3}$

(3) $\sin\theta=-\frac{1}{2}$ すなわち $\theta=\frac{7\pi}{6},\frac{11\pi}{6}$ のとき 最小で

より $\theta=\frac{3\pi}{2}$ のときも含めて

最小値は $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $P(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$ //

II $f(x)=x^3+x^2-x$ とおく

$f'(x)=3x^2+2x-1=(x+1)(3x-1)$　　$\frac{1}{3}\times\frac{1}{-1}$

$f'(x)=0$ とすると $x=-1,\ \frac{1}{3}$

x		-1		$\frac{1}{3}$	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$	↗	極大	↘	極小	↗

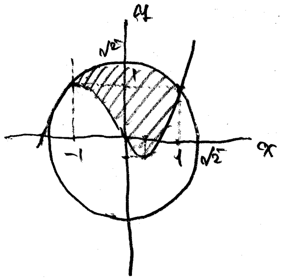
$x=-1$ で極大　極大値 $f(-1)=1$

$x=\frac{1}{3}$　〃 小　〃　$f(\frac{1}{3})=\frac{1}{27}+\frac{1}{9}-\frac{1}{3}=-\frac{5}{27}$

$x^3+x^2-x=0$ とすると

$x(x^2+x-1)=0$　∴ $x=0,\ \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$f(1)=1$.



求める面積Sは図の斜線部

$S=\int_{-1}^{1}\{1-(x^3+x^2-x)\}dx+\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$

$=-\int_{-1}^{1}(x+1)^2(x-1)dx+\frac{\pi}{2}-1$

$=\frac{1}{12}\cdot 2^4+\frac{\pi}{2}-1$

$=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}$ //

[7]

$f(x)=x^2$ とおく

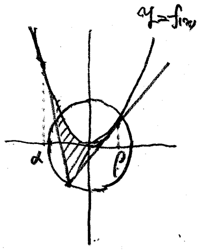
$f'(x)=2x$

$y=f(x)$ の $x=t$ における接線は

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

$y-t^2=2t(x-t)$

∴ $y=2tx-t^2$



これが $(\cos\theta,\sin\theta)$ を通るとき

$t^2-2(\cos\theta)t+\sin\theta=0$

これが2実解をもつとき判別式をDとするとD>0より

$D/4=\cos^2\theta-\sin\theta>0$

∴ $-1\le\sin\theta<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

∴ $t=\cos\theta\pm\sqrt{\cos^2\theta-\sin\theta}=\alpha,\beta\ (\alpha<\beta)$ とおく

このとき2本の接線は

$y=2\alpha x-\alpha^2$, $y=2\beta x-\beta^2$

$2\alpha x-\alpha^2=2\beta x-\beta^2$ とすると

$2(\alpha-\beta)x=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)$　∴ $x=\frac{\alpha+\beta}{2}$

図の斜線部の面積Sは

$S=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\{x^2-(2\alpha x-\alpha^2)\}dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\{x^2-(2\beta x-\beta^2)\}dx$

$=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}(x-\alpha)^2dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}(x-\beta)^2dx$

$=\left[\frac{(x-\alpha)^3}{3}\right]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}+\left[\frac{(x-\beta)^3}{3}\right]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}$

$=\frac{(\beta-\alpha)^3}{24}+\frac{(\beta-\alpha)^3}{24}$

$=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3$

$=\frac{1}{12}\{2\sqrt{\cos^2\theta-\sin\theta}\}^3$

$=\frac{2}{3}\{\sqrt{-\sin^2\theta-\sin\theta+1}\}^3$

$=\frac{2}{3}\{\sqrt{-(\sin\theta+\frac{1}{2})^2+\frac{5}{4}}\}^3$

$\sin\theta=-\frac{1}{2}$ すなわち $(a,b)=(\pm\frac{\sqrt{3}}{2},-\frac{1}{2})$ のとき

Sは最大値をとる //

[8]

I.(1) $f(x)=-x^3+ax^2+bx$ とおく

$f'(x)=-3x^2+2ax+b$

$y=f(x)$ の $x=t$ における接線は

$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

$y-(-t^3+at^2+bt)=(-3t^2+2at+b)(x-t)$

∴ $y=(-3t^2+2at+b)x+2t^3-at^2$

これが原点を通るとき

$0=2t^3-at^2$

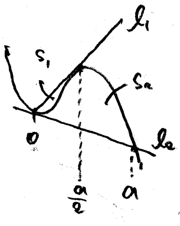
$t^2(2t-a)=0$　∴ $t=0,\ \frac{a}{2}$

$t=0$ のとき $y=bx$

$t=\frac{a}{2}$　〃　$y=(\frac{a^2}{4}+b)x$ //

(2) $-x^3+ax^2+bx=bx$ とすると

$x^2(x-a)=0$　∴ $x=0,\ a$



$-x^3+ax^2+bx=(\frac{a^2}{4}+b)x$ とすると

$x^3-ax^2+\frac{a^2}{4}x=0$

$x(x-\frac{a}{2})^2=0$　∴ $x=0,\ \frac{a}{2}$

$S_1=\int_0^{\frac{a}{2}}\{(\frac{a^2}{4}+b)x-(-x^3+ax^2+bx)\}dx$

$=\int_0^{\frac{a}{2}}(x^3-ax^2+\frac{a^2}{4}x)dx$

$=\int_0^{\frac{a}{2}}x(x-\frac{a}{2})^2dx=\frac{1}{12}\cdot(\frac{a}{2})^4=\frac{a^4}{192}$

$S_2=\int_0^a\{(-x^3+ax^2+hx)-hx\}dx$

$=-\int_0^a x^2(x-a)\,dx=\dfrac{a^4}{12}$

よって

$S_1:S_2=\dfrac{a^4}{192}:\dfrac{a^4}{12}=1:16$ //

II (1) $C_2: y=(x-a)^3-(x-a)$

$x^3-x=(x-a)^3-(x-a)$ として

$x^3-(x-a)^3-x+(x-a)=0$

$3ax^2-3a^2x+a^3-a=0$

$3x^2-3ax+a^2-1=0 \cdots ①$　　$x=\dfrac{3a\pm\sqrt{9a^2-12(a^2-1)}}{6}$

が実数解をもてばよいから　　$=\dfrac{3a\pm\sqrt{12-3a^2}}{6}$

判別式をDとして $D\geqq 0$ より

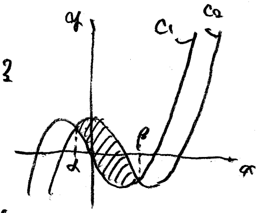
$D=9a^2-12(a^2-1)$

$=-3a^2+12\geqq 0$

$a^2\leqq 4$

$a>0$ より　$0<a\leqq 2$

(2) ①の異なる2実解を $\alpha, \beta\ (\alpha<\beta)$ とする



$S=\int_\alpha^\beta\{(x-a)^3-(x-a)$
$\quad-(x^3-x)\}dx$

$=-\int_\alpha^\beta(3ax^2-3a^2x+a^3-a)\,dx$

$=-3a\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

$=\dfrac{a}{2}(\beta-\alpha)^3$

$=\dfrac{a}{2}\left\{\dfrac{\sqrt{12-3a^2}}{3}\right\}^3$

$=\dfrac{\sqrt{3}a}{18}(4-a^2)\sqrt{4-a^2}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{18}\sqrt{a^2(4-a^2)^2(4-a^2)}$

$t=a^2$ とおくと $0<t\leqq 4$

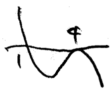
$=\dfrac{\sqrt{3}}{18}\sqrt{t(4-t)^3}$

$f(t)=t(4-t)^3$ とおくと

$f'(t)=(4-t)^3-3t(4-t)^2$

$=(4-t)^2\{(4-t)-3t\}$

$=4(4-t)^2(1-t)$



$f'(t)=0$ とすると $t=1, 4$

t	0		1		4
$f'(t)$		+	0	−	
$f(t)$		↗	3^3	↘	

$t=1$ のとき極大かつ最大

最大値は $\dfrac{\sqrt{3}}{18}\sqrt{1\cdot 3^3}=\dfrac{1}{2}$ //

9

(1) $f(x)=-x^4+2x^2$ とおく

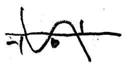
$f(-x)=f(x)$ より $y=f(x)$ は y 軸対称.

$x\geqq 0$ で考えて

$f'(x)=-4x^3+4x$

$=-4x(x^2-1)$

$=-4x(x+1)(x-1)$

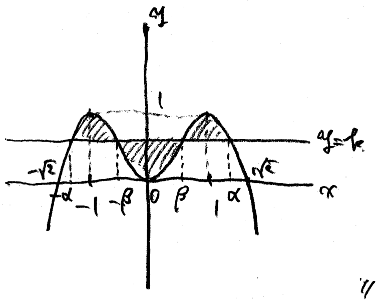


$f'(x)=0$ として $x=0, 1$

x	0		1	
$f'(x)$	0	+	0	−
$f(x)$		↗	極大	↘

$f(0)=0$

$x=1$ のとき極大　極大値 $f(1)=1$



//

(2) $0<k<1$ //

(3) $-x^4+2x^2=k$ として

$x^4-2x^2+k=0$

$t=x^2$ とおくと

$t^2-2t+k=0$

の2解が α^2, β^2 であるから

解と係数の関係より

$\alpha^2+\beta^2=2$

$\alpha^2\beta^2=k \quad\therefore \alpha\beta=\sqrt{k}\ (\alpha, \beta>0)$

$\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha+\beta}=(\alpha+\beta)^2-3\alpha\beta$

$=\alpha^2+\beta^2-\alpha\beta=2-\sqrt{k}$

$\dfrac{\alpha^5+\beta^5}{\alpha+\beta}=\dfrac{(\alpha^4+\beta^4)(\alpha+\beta)-\alpha\beta(\alpha^3+\beta^3)}{\alpha+\beta}$

$=\alpha^4+\beta^4-\alpha\beta\cdot\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha+\beta}$

$=2(\alpha^2+\beta^2)-2k-\sqrt{k}\cdot(2-\sqrt{k})$

$=-k-2\sqrt{k}+4$ //

(4) $\int_{-\beta}^{\beta}\{k-(-x^4+2x^2)\}dx=\int_{\beta}^{\alpha}\{(-x^4+2x^2)-k\}dx$ より

$\int_{-\beta}^{\alpha}(x^4-2x^2+k)dx=0$

$\left[\frac{x^5}{5}-\frac{2}{3}x^3+kx\right]_{-\beta}^{\alpha}=0$

$\frac{\alpha^5+\beta^5}{5}-\frac{2}{3}(\alpha^3+\beta^3)+k(\alpha+\beta)=0$

$3\cdot\frac{\alpha^5+\beta^5}{\alpha+\beta}-10\cdot\frac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha+\beta}+15k=0$

$3(-k-2\sqrt{k}+4)-10(2-\sqrt{k})+15k=0$

$12k+4\sqrt{k}-8=0$ $\qquad \frac{1}{3}\times\frac{1}{-2}$

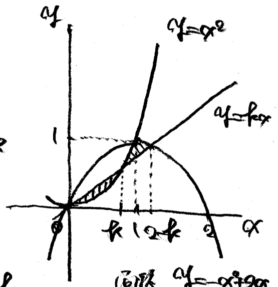
$3k+\sqrt{k}-2=0$

$(\sqrt{k}+1)(3\sqrt{k}-2)=0$

∴ $\sqrt{k}=\frac{2}{3}$ $\qquad$ ∴ $k=\frac{4}{9}$ //

[10]

(1) D∪(E∩F) は左図の斜線部



$x^2=kx$ として

$x(x-k)=0$ ∴ $x=0, k$

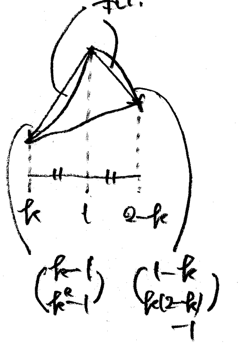
$-x^2+2x=kx$ として

$x\{x-(2-k)\}=0$

∴ $x=0, 2-k$

$m(k)=\int_0^k\{kx-x^2\}dx$

$+\frac{1}{2}|(k-1)(-k^2+2k-1)$
$-(1-k)(k^2-1)|$



$=-\int_0^k x(x-k)dx$

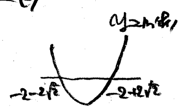
$+\frac{1}{2}|(1-k)(2k-2)|$

$=\frac{1}{6}k^3+(1-k)^2$ //

(2) $m(k)=\frac{1}{6}k^3+k^2-2k+1$

$m'(k)=\frac{1}{2}k^2+2k-2=\frac{1}{2}(k^2+4k-4)$

$m'(k)=0$ とすると $k=-2+2\sqrt{2}$



k	0		$-2+2\sqrt{2}$		1
$m'(k)$		−	0	+	
$m(k)$		↘	極小	↗	

$k=-2+2\sqrt{2}$ のとき 極小かつ最小.

$m(k)=\frac{1}{6}(k^3+6k^2-12k+6)$

$=\frac{1}{6}\{(k^2+4k-4)(k+2)-16k+14\}$

$=\frac{1}{6}\{-16(-2+2\sqrt{2})+14\}=\frac{1}{6}(46-32\sqrt{2})$

$=\frac{23-16\sqrt{2}}{3}$