

1.2 複素数平面(2)

(1) ド・モアブルの定理

0 でない複素数に絶対値が 1 の複素数 $z = \cos \theta + i \sin \theta$ をかけると、絶対値は変わらずに、偏角が θ だけ増える。

このことを用いて z の累乗を考えると

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$$

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$$

となり、一般の自然数 n について、次の等式が成り立つ。

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta \quad \cdots \textcircled{1}$$

これは数学的帰納法により証明できる。

0 でない複素数 w に対して $w^0 = 1$ と定める。このとき、 $\textcircled{1}$ は $n = 0$ のときにも成り立つことが分かる。

また、0 でない複素数 w と自然数 m に対して $w^{-m} = \frac{1}{w^m}$ と定める。

$\textcircled{1}$ において、 m を自然数として、 $n = -m$ として、

$$\begin{aligned} (\cos \theta + i \sin \theta)^{-m} &= \frac{1}{(\cos \theta + i \sin \theta)^m} \\ &= \frac{1}{\cos m\theta + i \sin m\theta} \quad (\textcircled{1} \text{より}) \\ &= \cos m\theta - i \sin m\theta \\ &= \cos(-m\theta) + i \sin(-m\theta) \end{aligned}$$

よって、 $\textcircled{1}$ は n が負の整数のときも成り立つ。

したがって、次のド・モアブルの定理が成り立つ。

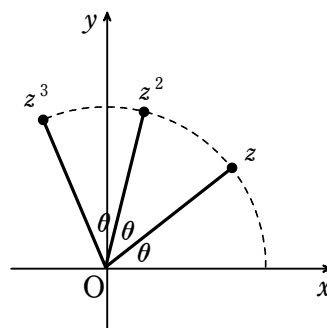
ド・モアブルの定理

n が整数のとき、 $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$

例1

i を虚数単位とする。 $(1+i)^6 = {}^{\text{ア}} \boxed{}$ である。また、 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}+i}\right)^6$
 $= {}^{\text{イ}} \boxed{}$ 、 $\left(\frac{1-i}{\sqrt{3}-i}\right)^{12} = {}^{\text{ウ}} \boxed{}$ である。

解説



ド・モアブルの定理より

$$\begin{aligned}
 (1+i)^6 &= \left\{ \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) \right\}^6 \\
 &= (\sqrt{2})^6 \left\{ \cos \left(6 \cdot \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(6 \cdot \frac{\pi}{4} \right) \right\} \\
 &= 8 \left(\cos \frac{3}{2} \pi + i \sin \frac{3}{2} \pi \right) = -8i \\
 \left(\frac{1}{\sqrt{3}+i} \right)^6 &= (\sqrt{3}+i)^{-6} = \left\{ 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) \right\}^{-6} \\
 &= 2^{-6} \left\{ \cos \left(-6 \cdot \frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-6 \cdot \frac{\pi}{6} \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{64} \{ \cos(-\pi) + i \sin(-\pi) \} = -\frac{1}{64} \\
 \frac{1-i}{\sqrt{3}-i} &= \frac{\sqrt{2} \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right\}}{2 \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right\}} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right\} \text{ より} \\
 \left(\frac{1-i}{\sqrt{3}-i} \right)^{12} &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{12} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} \right) \right\} \right\}^{12} \\
 &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^{12} \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{12} \cdot 12 \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{12} \cdot 12 \right) \right\} \\
 &= \frac{1}{64} \{ \cos(-\pi) + i \sin(-\pi) \} = -\frac{1}{64}
 \end{aligned}$$

例2

$z = \frac{1}{4} \{ (\sqrt{3}+1) + (\sqrt{3}-1)i \}$ とする. ただし, i は虚数単位である.

(1) z^2 の極形式を求めよ. ただし, 偏角 θ は $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ とする.

(2) z^{13} の値を求めよ.

(解説)

$$\begin{aligned}
 (1) \quad z^2 &= \frac{1}{16} \{ (\sqrt{3}+1)^2 + 2(\sqrt{3}-1)i - (\sqrt{3}-1)^2 \} \\
 &= \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i = \frac{1}{2} (\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \ z^{13} &= (z^2)^6 z = \frac{1}{2^6} (\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) \times \frac{1}{4} \{(\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)i\} \\
 &= -\frac{1}{256} \{(\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)i\}
 \end{aligned}$$

例3

複素数 $z = \frac{1 + \sqrt{3}i}{1 + i}$ について、 z^2 の偏角 θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) は $\theta =$
 であり、 z^n が実数になる最小の自然数 n は $n =$ である。ただし、 i は虚数単位である。

解説

$$z = \frac{2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)}{\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right) \text{ より}$$

$$\theta = 2 \cdot \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$$

$$z^n = (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{n\pi}{12} + i \sin \frac{n\pi}{12} \right)$$

z^n が実数となるとき、

$$\sin \frac{n\pi}{12} = 0 \quad \therefore \frac{n\pi}{12} = k\pi \ (k \text{ は自然数}) \quad \therefore n = 12k$$

自然数 n が最小となるのは $k=1$ のときであるから

求める n は $n =$ 12

例4

(1) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n + i^n = 0$ を満たす最小の自然数 n を求めよ.

(2) $(\sqrt{3}+i)^m = (1+i)^n$ が成り立つ正の整数 m, n のうちで m, n がそれぞれ最小となるとき, m と n の値を求めよ.

(解説)

$$(1) \left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n + i^n = 0$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^n = -i^n$$

$$\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)^n = -\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)^n$$

$$\cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{6} = -\left(\cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\cos \frac{n\pi}{6} + i \sin \frac{n\pi}{6} = \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \pi\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \pi\right)$$

よって,

$$\frac{n\pi}{2} + \pi - \frac{n\pi}{6} = 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$$\frac{n\pi}{3} = (2k-1)\pi \quad \therefore n = 3(2k-1)$$

これを満たす最小の自然数 n は, $n = 3$

$$(2) (\sqrt{3}+i)^m = (1+i)^n$$

$$\left\{2\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)\right\}^m = \left\{\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right\}^n$$

$$2^m \left(\cos \frac{m\pi}{6} + i \sin \frac{m\pi}{6}\right) = 2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{n\pi}{4} + i \sin \frac{n\pi}{4}\right)$$

$$\therefore 2^m = 2^{\frac{n}{2}}, \frac{n\pi}{4} - \frac{m\pi}{6} = 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$

$$\therefore n = 2m, 3n - 2m = 24k$$

$$\therefore m = 6k, n = 2m$$

これを満たす最小の正の整数 m, n は

$$m = 6, n = 12$$

(2) n 乗根

自然数 n と複素数 α に対して、 $z^n = \alpha$ を満たす複素数 z を、 α の n 乗根という。0 でない複素数 α の n 乗根は、 n 個あることが知られている。複素数の極形式を用いて、まず 1 の n 乗根について考える。

n を自然数として、 z を 1 の n 乗根とする。

$$z^n = 1 \text{ より, } |z^n| = |z|^n = 1$$

$$|z| \text{ は正の実数より, } |z| = 1$$

ここで、 $z = \cos \theta + i \sin \theta$ とおくと、ド・モアブルの定理より

$$z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta = 1$$

$$\cos n\theta = 1, \sin n\theta = 0 \text{ より}$$

$$n\theta = 2k\pi \quad \therefore \theta = \frac{2k\pi}{n} \quad (k \text{ は整数})$$

となる。逆に、 k を整数として

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad \cdots \textcircled{1}$$

とおくと、ド・モアブルの定理より $(z_k)^n = 1$ が成り立つから、 z_k は 1 の n 乗根である。また、 z_{n+k} と z_k の偏角は 2π だけ異なり、ともに絶対値は 1 であるから $z_{n+k} = z_k$ が成り立つ。よって、 $\textcircled{1}$ の z_k のうち、互いに異なるものは、

$$z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$$

の n 個である。

以上より、次のことが成り立つ。

1 の n 乗根

自然数 n に対して、1 の n 乗根は、次の n 個の複素数である

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1)$$

複素数平面上で、自然数 n に対して、1 の n 乗根

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k=0, 1, 2, \dots, n-1)$$

を表す点は、単位円を n 等分する n 個の分点である。

特に分点の 1 つは点 1 である。

例5

複素数平面上で、 $z^6=1$ の解を頂点とする正六角形の各辺の中点を解にもつ方程式を作ったら $az^6=1$ となった． a の値を求めよ．

解説

$z^6=1$ の解は

$$z_k = \cos \frac{k\pi}{3} + i \sin \frac{k\pi}{3}$$

($k=0, 1, 2, 3, 4, 5$)

z_k は単位円に内接する正六角形の頂点である

線分 $z_k z_{k+1}$ の中点を w_k とすると

w_k は z_k を $\frac{\pi}{6}$ 回転し、

原点からの距離を $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 倍拡大した点より

$$w_k = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) z_k$$

$$\therefore z_k = \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right\} w_k$$

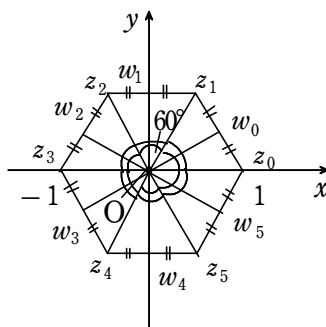
z_k は $z^6=1$ の解より

$$z_k^6 = 1$$

$$\left\{ \frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right\} w_k \right\}^6 = 1$$

$$-\frac{64}{27} w_k^6 = 1$$

よって、 w_k は $-\frac{64}{27} z^6=1$ の解であるから、 $a = -\frac{64}{27}$



例6

$z^{12}=1$ を満たす複素数は全部で 12 個あり、それらを $z_0, z_1, \dots, z_{11}$ とする。

(1) $z^{12}=1$ を満たす 12 個の複素数をすべて求めよ。

(2) 和 $z_0 + z_1 + \dots + z_{11}$ の値を求めよ。

(3) 積 $z_0 z_1 \dots z_{11}$ の値を求めよ。

解説

$$(1) z^{12} = 1$$

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \ (r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi)$ とすると

$$r^{12}(\cos 12\theta + i \sin 12\theta) = \cos 0 + i \sin 0$$

$$r^{12} = 1, \quad 12\theta = 2k\pi \ (k = 0, 1, \dots, 11)$$

$$\therefore r = 1, \theta = \frac{k\pi}{6}$$

求める解は

$$1, \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \\ -1, -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, -i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$

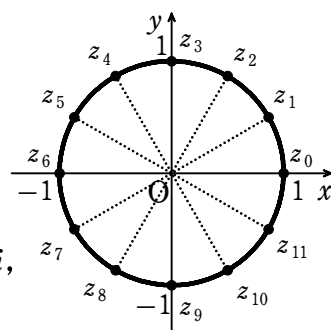
(2) (1)の結果より, $z_0, z_1, \dots, z_{11}$ を

$$z_0 = 1, \quad z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, \quad z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$z_3 = i, \quad z_4 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_5 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i,$$

$$z_6 = -1, \quad z_7 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i, \quad z_8 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$z_9 = -i, \quad z_{10} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad z_{11} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$$



とおくと

$$z_0 = -z_6, \quad z_1 = -z_7, \quad z_2 = -z_8, \quad z_3 = -z_9, \quad z_4 = -z_{10}, \quad z_5 = -z_{11} \text{ より}$$

$$z_0 + z_1 + \dots + z_{11} = 0$$

(3) また, $\overline{z_1} = z_{11}, \overline{z_2} = z_{10}, \overline{z_3} = z_9, \overline{z_4} = z_8, \overline{z_5} = z_7$ より

$$z_1 z_{11} = |z_1|^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1$$

同様に, $z_2 z_{10} = 1, z_3 z_9 = 1, z_4 z_8 = 1, z_5 z_7 = 1$ より

$$z_0 z_1 \dots z_{11} = z_0 \cdot z_1 z_{11} \cdot z_2 z_{10} \cdot z_3 z_9 \cdot z_4 z_8 \cdot z_5 z_7 \cdot z_6 \\ = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1) = -1$$

例7

N を自然数とし、複素数 $z = \cos \theta + i \sin \theta$ は $z^N = 1$ を満たすとして、以下の級数和 S_1, S_2, S_3 の値を求めよ。ただし、 i は虚数単位 ($i^2 = -1$) である。

$$(1) \quad S_1 = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{N-1}$$

$$(2) \quad S_2 = 1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos(N-1)\theta$$

$$(3) \quad S_3 = 1 + \cos^2 \theta + \cos^2 2\theta + \cdots + \cos^2(N-1)\theta$$

(解説)

$$(1) \quad z \neq 1 \text{ のとき, } S_1 = \frac{1-z^N}{1-z} = \frac{1-1}{1-z} = 0$$

$$z = 1 \text{ のとき, } S_1 = 1 + 1 + \cdots + 1 = N$$

$$(2) \quad z^k = \cos k\theta + i \sin k\theta \text{ であるから, } S_2 \text{ は } S_1 \text{ の実部より}$$

$$z \neq 1 \text{ のとき, } S_2 = 0, \quad z = 1 \text{ のとき, } S_2 = N$$

$$(3) \quad S_3 = \sum_{k=0}^{N-1} \cos^2 k\theta = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1 + \cos 2k\theta}{2} = \frac{N}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} \cos 2k\theta$$

$$S = 1 + z^2 + z^4 + \cdots + z^{2(N-1)} \text{ とすると}$$

$$z^2 \neq 1 \text{ のとき, } S = \frac{1-z^{2N}}{1-z^2} = \frac{1-1}{1-z^2} = 0$$

$$z^2 = 1 \text{ のとき, } S = 1 + 1 + \cdots + 1 = N$$

$$\sum_{k=0}^{N-1} \cos 2k\theta \text{ は, } S \text{ の実部より}$$

$$z \neq \pm 1 \text{ のとき, } S_3 = \frac{N}{2}, \quad z = \pm 1 \text{ のとき, } S_3 = \frac{N}{2} + \frac{N}{2} = N$$

例8

i を虚数単位とし、 $z = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$ とおく。

$$(1) \quad z^5 \text{ および } z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 \text{ の値を求めよ。}$$

$$(2) \quad t = z + \frac{1}{z} \text{ とおく。} t^2 + t \text{ の値を求めよ。}$$

$$(3) \quad \cos \frac{2\pi}{5} \text{ の値を求めよ。}$$

$$(4) \quad \text{半径 } 1 \text{ の円に内接する正五角形の } 1 \text{ 辺の長さの } 2 \text{ 乗を求めよ。}$$

(解説)

(1) ド・モアブルの定理より

$$z^5 = \left(\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} \right)^5 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

$z \neq 1$ より

$$z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = \frac{1 - z^5}{1 - z} = \frac{1 - 1}{1 - z} = 0$$

別解

$$z^5 - 1 = 0$$

$$(z - 1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) = 0$$

$z \neq 1$ より, $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

$$(2) t = z + \frac{1}{z} \text{ より}$$

$$\begin{aligned} t^2 + t &= \left(z + \frac{1}{z} \right)^2 + z + \frac{1}{z} = z^2 + 2z \cdot \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + z + \frac{1}{z} \\ &= z^2 + z + 2 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} \\ &= 1 + \frac{z^4 + z^3 + z^2 + z + 1}{z^2} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) z + \frac{1}{z} &= z + z^{-1} = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{2\pi}{5} - i \sin \frac{2\pi}{5} \\ &= 2 \cos \frac{2\pi}{5} \end{aligned}$$

よって

$$\cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right) = \frac{1}{2} t$$

ここで, (2) より

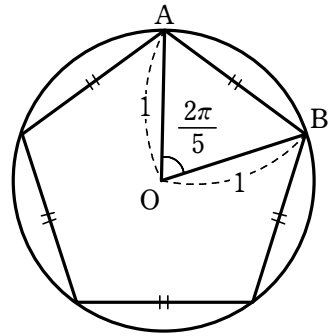
$$t^2 + t - 1 = 0 \quad \therefore t = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\cos \frac{2\pi}{5} > 0 \text{ より, } \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

(4) 右の図のように、半径 1 の円の中心を O 、
円 O に内接する正五角形のとなり合う 2 つの
頂点を A 、 B とする

$\triangle OAB$ で余弦定理より

$$\begin{aligned} AB^2 &= OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos \frac{2\pi}{5} \\ &= 1^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \\ &= \frac{5 - \sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$



例9

$\alpha = \cos 72^\circ + i \sin 72^\circ$ とする.

- (1) $1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = 0$ を示せ.
- (2) $u = \alpha + \alpha^4$, $v = \alpha^2 + \alpha^3$ とおくとき, $u + v$ と uv の値を求めよ.
- (3) $\cos 72^\circ$ の値を求めよ.

解説

$$(1) \alpha^5 = \cos 360^\circ + i \sin 360^\circ \quad \therefore \alpha^5 = 1$$

$\alpha \neq 1$ より

$$1 + \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = \frac{1 - \alpha^5}{1 - \alpha} = 0$$

$$(2) u + v = \alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 = -1$$

$$uv = (\alpha + \alpha^4)(\alpha^2 + \alpha^3) = \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^6 + \alpha^7 = \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha + \alpha^2 = -1$$

$$(3) \alpha^4 \alpha = 1 \text{ より, } \alpha^4 = \frac{1}{\alpha} = \cos 72^\circ - i \sin 72^\circ$$

よって, $u = \alpha + \alpha^4 = 2 \cos 72^\circ > 0$

u , v は $x^2 + x - 1 = 0$ の 2 つの解であるから, これを解いて

$$2 \cos 72^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \quad \therefore \cos 72^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}$$

例10

$z = \cos \frac{2\pi}{7} + i \sin \frac{2\pi}{7}$ (i は虚数単位) とおく。

(1) $z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$ を求めよ。

(2) $\alpha = z + z^2 + z^4$ とするとき, $\alpha + \bar{\alpha}$, $\alpha \bar{\alpha}$ および α を求めよ。ただし, $\bar{\alpha}$ は α の共役複素数である。

(3) $(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)$ を求めよ。

解説

$$(1) z^7 = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1$$

$z \neq 1$ より

$$z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = \frac{z(1-z^6)}{1-z} = \frac{z-z^7}{1-z} = \frac{z-1}{1-z} = -1$$

(2) $z^k \bar{z}^k = |z^k|^2 = 1$, $z^k z^{7-k} = z^7 = 1$ ($k=1, 2, \dots, 6$) より

$$\bar{z}^k = z^{7-k}$$

よって, $\bar{\alpha} = \overline{z + z^2 + z^4} = z^6 + z^5 + z^3$ より

$$\alpha + \bar{\alpha} = (z + z^2 + z^4) + (z^6 + z^5 + z^3) = z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = -1$$

$$\begin{aligned} \alpha \bar{\alpha} &= (z + z^2 + z^4)(z^6 + z^5 + z^3) = z^7 + z^8 + z^{10} + z^6 + z^7 + z^9 + z^4 + z^5 + z^7 \\ &= 1 + z + z^3 + z^6 + 1 + z^2 + z^4 + z^5 + 1 = 3 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 = 2 \end{aligned}$$

α , $\bar{\alpha}$ は 2 次方程式 $x^2 + x + 2 = 0$ の解より

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{7}i}{2}$$

α の虚部は $\sin \frac{2}{7}\pi + \sin \frac{4}{7}\pi + \sin \frac{8}{7}\pi = \sin \frac{2}{7}\pi + \sin \frac{4}{7}\pi - \sin \frac{\pi}{7} > 0$

$\left(\sin \frac{2}{7}\pi > \sin \frac{\pi}{7}\right)$ より

$$\alpha = \frac{-1 + \sqrt{7}i}{2}$$

(3) $\beta = (1-z)(1-z^2)(1-z^4)$ とおくと

$$\bar{\beta} = (1-\bar{z})(1-\bar{z}^2)(1-\bar{z}^4) = (1-z^6)(1-z^5)(1-z^3)$$

よって

$$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6) = \beta \bar{\beta}$$

ここで

$$\beta = \{1 - (z + z^2 + z^4) + (z^3 + z^6 + z^5) - z^7\}$$

$$= -\alpha + \overline{\alpha} = -\frac{-1+\sqrt{7}i}{2} + \frac{-1-\sqrt{7}i}{2} = -\sqrt{7}i$$

$$\overline{\beta} = \sqrt{7}i$$

より

$$\beta \overline{\beta} = (-\sqrt{7}i) \cdot \sqrt{7}i = 7$$

別解

z^k ($k=1, 2, \dots, 6$) は,

$x^7-1=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=0$ の解である

$k=1, 2, \dots, 6$ のとき, $z^k \neq 1$ で z^k はすべて異なるから

因数定理より

$$x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1=(x-z)(x-z^2)(x-z^3)(x-z^4)(x-z^5)(x-z^6)$$

$x=1$ を代入して

$$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)=1+1+1+1+1+1+1=7$$

例11

方程式 $x^{2n+1}=1$ の相異なる解を $1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2n}$ とする. (ただし, n は正の整数)

- (1) $x^{2n+1}-1$ を上の解を用いて因数分解せよ.
- (2) $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2) \cdots (1+\alpha_{2n})=1$ を証明せよ.
- (3) $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_{2n}^2$ は上の方程式の相異なる解であることを示せ.
- (4) $(1+\alpha_1^2)(1+\alpha_2^2) \cdots (1+\alpha_{2n}^2)$ の値を求めよ.

解説

$$(1) \quad x^{2n+1}-1=(x-1)(x-\alpha_1)(x-\alpha_2) \cdots (x-\alpha_{2n})$$

(2) (1) において $x=-1$ を代入すると

$$(-1)^{2n+1}-1=(-1-1)(-1-\alpha_1)(-1-\alpha_2) \cdots (-1-\alpha_{2n})$$

$$-2=-2 \cdot (-1)^{2n}(1+\alpha_1)(1+\alpha_2) \cdots (1+\alpha_{2n})$$

$$\therefore (1+\alpha_1)(1+\alpha_2) \cdots (1+\alpha_{2n})=1$$

(3) $k=1, 2, 3, \dots, 2n$ とすると, $\alpha_k^{2n+1}=1$

$(\alpha_k^2)^{2n+1}=(\alpha_k^{2n+1})^2=1$ より, α_k^2 は $x^{2n+1}=1$ の解である

$\alpha_i^2=\alpha_j^2$ ($1 \leq i \leq 2n, 1 \leq j \leq 2n$, ただし $i \neq j$) とすると

$$\alpha_i^2-\alpha_j^2=(\alpha_i+\alpha_j)(\alpha_i-\alpha_j)=0$$

$\alpha_i \neq \alpha_j$ より, $\alpha_i+\alpha_j=0$ すなわち, $\alpha_i=-\alpha_j$

このとき、 $(\alpha_i)^{2n+1} = (-\alpha_j)^{2n+1} = (-1)^{2n+1}(\alpha_j)^{2n+1} = -1$ となり、

$(\alpha_i)^{2n+1} = 1$ と矛盾

よって、 $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_{2n}^2$ の中に等しいものは存在しない

以上より、題意は示された

(4) $\alpha_i^2 = 1$ ($1 \leq i \leq 2n$) とすると、 $(\alpha_i + 1)(\alpha_i - 1) = 0$

$\alpha_i - 1 \neq 0$ より、 $\alpha_i = -1$ とすると α_i が $x^{2n+1} = 1$ の解であることに矛盾

よって、 $\alpha_i^2 \neq 1$ 、すなわち $\alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_{2n}^2$ はすべて 1 に等しくない

$1, \alpha_1^2, \alpha_2^2, \dots, \alpha_{2n}^2$ は方程式 $x^{2n+1} = 1$ の相異なる解であるから、

$$x^{2n+1} - 1 = (x - 1)(x - \alpha_1^2)(x - \alpha_2^2) \cdot \dots \cdot (x - \alpha_{2n}^2)$$

(2) と同様にして、求める式の値は 1

例12

複素数 $\alpha = \cos \frac{360^\circ}{7} + i \sin \frac{360^\circ}{7}$ に対し、次の式の値を求めよ。ただし、 i は虚数単位とする。

(1) $\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6$

(2) $\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha^6}$

(3) $\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha^2} + \frac{1}{1-\alpha^3} + \frac{1}{1-\alpha^4} + \frac{1}{1-\alpha^5} + \frac{1}{1-\alpha^6}$

(4) $\frac{\alpha^2}{1-\alpha} + \frac{\alpha^4}{1-\alpha^2} + \frac{\alpha^6}{1-\alpha^3} + \frac{\alpha^8}{1-\alpha^4} + \frac{\alpha^{10}}{1-\alpha^5} + \frac{\alpha^{12}}{1-\alpha^6}$

解説

(1) $\alpha^7 = \cos 360^\circ + i \sin 360^\circ = 1$

$\alpha \neq 1$ より

$$\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6 = \frac{\alpha(1-\alpha^6)}{1-\alpha} = \frac{\alpha-1}{1-\alpha} = -1$$

(2) (与式) $= \frac{1}{1-\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha-\alpha^7} = \frac{1}{1-\alpha} + \frac{\alpha}{\alpha-1} = \frac{1-\alpha}{1-\alpha} = 1$

(3) (与式) $= \left(\frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha^6} \right) + \left(\frac{1}{1-\alpha^2} + \frac{1}{1-\alpha^5} \right) + \left(\frac{1}{1-\alpha^3} + \frac{1}{1-\alpha^4} \right)$

ここで、(2) と同様に

$$\frac{1}{1-\alpha^2} + \frac{1}{1-\alpha^5} = \frac{1}{1-\alpha^2} + \frac{\alpha^2}{\alpha^2-1} = 1,$$

$$\frac{1}{1-\alpha^3} + \frac{1}{1-\alpha^4} = \frac{1}{1-\alpha^3} + \frac{\alpha^3}{\alpha^3-1} = 1$$

よって

$$(\text{与式}) = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$\begin{aligned} (4) (\text{与式}) &= \left(-\alpha - 1 + \frac{1}{1-\alpha}\right) + \left(-\alpha^2 - 1 + \frac{1}{1-\alpha^2}\right) + \left(-\alpha^3 - 1 + \frac{1}{1-\alpha^3}\right) \\ &\quad + \left(-\alpha^4 - 1 + \frac{1}{1-\alpha^4}\right) + \left(-\alpha^5 - 1 + \frac{1}{1-\alpha^5}\right) + \left(-\alpha^6 - 1 + \frac{1}{1-\alpha^6}\right) \\ &= -6 - (\alpha + \alpha^2 + \alpha^3 + \alpha^4 + \alpha^5 + \alpha^6) + \frac{1}{1-\alpha} + \frac{1}{1-\alpha^2} + \frac{1}{1-\alpha^3} + \frac{1}{1-\alpha^4} \\ &\quad + \frac{1}{1-\alpha^5} + \frac{1}{1-\alpha^6} \\ &= -6 - (-1) + 3 = -2 \end{aligned}$$

例13

(1) 方程式 $z^3 = -8i$ を解け.

(2) 方程式 $z^4 = -8 - 8\sqrt{3}i$ を解け. ただし, i は虚数単位である.

(3) 方程式 $X^6 - \sqrt{2}X^3 + 1 = 0$ の複素数解を求めよ.

解説

$$(1) z^3 = -8i$$

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) とすると

$$r^3(\cos 3\theta + i \sin 3\theta) = 8\left(\cos \frac{3}{2}\pi + i \sin \frac{3}{2}\pi\right)$$

$$r^3 = 8, 3\theta - \frac{3}{2}\pi = 2k\pi \quad (k = 0, 1, 2)$$

$$\therefore r = 2, \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{2k}{3}\pi$$

よって

$$z = 2i, -\sqrt{3} - i, \sqrt{3} - i$$

$$(2) z^4 = -8 - 8\sqrt{3}i$$

$z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($r > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) とすると

$$r^4(\cos 4\theta + i \sin 4\theta) = 16\left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \sin \frac{4}{3}\pi\right)$$

$$r^4 = 16, 4\theta - \frac{4}{3}\pi = 2k\pi \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

$$\therefore r=2, \theta=\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2}$$

よって,

$$z=1+\sqrt{3}i, -\sqrt{3}+i, -1-\sqrt{3}i, \sqrt{3}-i$$

$$(3) X^6-\sqrt{2}X^3+1=0$$

$$(X^3)^2-\sqrt{2}X^3+1=0$$

$$X^3=\frac{\sqrt{2}\pm\sqrt{2}i}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}i$$

$$X^3=\cos\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) \text{ (複号同順)}$$

$X=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ($r>0, 0\leq\theta<2\pi$) とすると

$$r^3(\cos 3\theta+i\sin 3\theta)=\cos\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)$$

$$r^3=1, \quad 3\theta-\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)=2k\pi \quad (k=0, 1, 2)$$

$$\therefore r=1, \theta=\pm\frac{\pi}{12}+\frac{2k}{3}\pi$$

$$\cos\frac{\pi}{12}=\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \quad \text{より}$$

$$X=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\pm\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i, -\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i, -\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\pm\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}i$$

補1

複素数 α は、 $\alpha^5=1$ 、 $\alpha \neq 1$ を満たしている。このとき、次の問いに答えよ。

(1) 等式 $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=0$ が成り立つことを示せ。

(2) $(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)(1-\alpha^4)$ が実数であることを示し、その値を求めよ。

(3) $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たす実数 θ に対して、 $z = \cos \theta + i \sin \theta$ とおく。このとき、等式

$$|1-z| = 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

が成り立つことを示せ。ただし、 i は虚数単位を表す。

(4) $\sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5} \sin \frac{3\pi}{5} \sin \frac{4\pi}{5}$ の値を求めよ。

解説

(1) $\alpha^5=1$ から、 $\alpha^5-1=0$ より

$$(\alpha-1)(1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)=0$$

$\alpha \neq 1$ より、 $1+\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4=0$

(2) $(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)(1-\alpha^4)$

$$= \{(1-\alpha)(1-\alpha^4)\} \{(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)\}$$

$$= (1-\alpha-\alpha^4+\alpha^5)(1-\alpha^2-\alpha^3+\alpha^5)$$

$$= (2-\alpha-\alpha^4)(2-\alpha^2-\alpha^3)$$

$$= 4-2\alpha-2\alpha^2-\alpha^3-\alpha^4+\alpha^6+\alpha^7$$

$$= 4-2\alpha-2\alpha^2-\alpha^3-\alpha^4+\alpha+\alpha^2$$

$$= 4-(\alpha+\alpha^2+\alpha^3+\alpha^4)=4-(-1)=5$$

よって、 $(1-\alpha)(1-\alpha^2)(1-\alpha^3)(1-\alpha^4)$ は実数であり、その値は5である

【注】例10の別解のようにやってもよい。ただし、因数定理を使う際に、 $\alpha, \alpha^2, \alpha^3, \alpha^4$ がすべて異なることを示さなければならないが、 α が $z^5=1$ の虚数解のどれであるかは具体的に定まっていないので、意外と面倒である。

(3) $|1-z| = |(1-\cos \theta) - i \sin \theta|$

$$= \sqrt{(1-\cos \theta)^2 + (-\sin \theta)^2}$$

$$= \sqrt{2(1-\cos \theta)} = \sqrt{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} = 2 \left| \sin \frac{\theta}{2} \right|$$

$0 \leq \theta < 2\pi$ であるから, $\sin \frac{\theta}{2} \geq 0$ より

$$|1 - z| = 2 \sin \frac{\theta}{2}$$

(4) $\alpha = \cos \frac{2}{5}\pi + i \sin \frac{2}{5}\pi$ とすると, α は $\alpha^5 = 1$, $\alpha \neq 1$ を満たす

(2)より

$$|(1 - \alpha)(1 - \alpha^2)(1 - \alpha^3)(1 - \alpha^4)| = 5$$

$$|1 - \alpha||1 - \alpha^2||1 - \alpha^3||1 - \alpha^4| = 5$$

$\alpha^k = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5}$ (k は整数) であるから, (3)より

$$\left(2 \sin \frac{\pi}{5}\right) \left(2 \sin \frac{2\pi}{5}\right) \left(2 \sin \frac{3\pi}{5}\right) \left(2 \sin \frac{4\pi}{5}\right) = 5$$

$$\therefore \sin \frac{\pi}{5} \sin \frac{2\pi}{5} \sin \frac{3\pi}{5} \sin \frac{4\pi}{5} = \frac{5}{16}$$