

## 1.5 剰余の問題(2)

整式  $P(x)$  を 2 次以上の整式で割ったときの余りを求める問題について考える。剰余の定理と同様に、(割る数) $\times$ (商)の項が 0 になるように  $x$  に値を代入して条件式を求めればよい。未知数の数と同じだけ条件式が得られればよいが、数値代入だけでは条件式が足りなくなる場合があり、そのときは工夫が必要となる。

### 例1

整式  $x^4 - x^3$  を整式  $x^2 - 1$  で割ったときの余りを求めよ。

解説

(1)  $P(x) = x^4 - x^3$  とおく

$P(x)$  を 2 次式  $x^2 - 1$  で割ったときの商を  $Q(x)$ ，  
余りは 1 次以下であるから、 $ax + b$  とおくと

$$\begin{aligned} P(x) &= (x^2 - 1)Q(x) + ax + b \\ &= (x + 1)(x - 1)Q(x) + ax + b \end{aligned}$$

$x = 1$  を代入して、 $P(1) = a + b \quad \therefore a + b = 0 \cdots \textcircled{1}$

$x = -1$  を代入して、 $P(-1) = -a + b \quad \therefore -a + b = 2 \cdots \textcircled{2}$

①、②より、 $a = -1, b = 1$

よって余りは、 $-x + 1$

恒等式における数値代入法を行っているが、整式の割り算は必ず実行できて、余りは、ただ 1 通りに決まることが保証されているので、 $x = 1, -1$  を代入して求めた余りの他にはなく、逆を確認する必要はない。

別解 この程度であれば筆算を実行してもよい。

右の計算から、求める余りは

$$-x + 1$$

$$\begin{array}{r} x^2 - x + 1 \\ x^2 - 1 \overline{) x^4 - x^3} \\ \underline{x^4 \phantom{- x^2}} \phantom{- x^3} \\ -x^3 + x^2 \\ \underline{-x^3 \phantom{+ x^2}} + x \\ x^2 - x \\ \underline{x^2 \phantom{- x} - 1} \\ -x + 1 \end{array}$$

**例2**

(1) 整式  $P(x)$  を  $x-1$  で割ったときの余りは5,  $x+2$  で割ったときの余りは  $-1$  である. このとき,  $P(x)$  を  $(x-1)(x+2)$  で割ったときの余りを求めよ.

(2) ある整式  $P(x)$  を  $(x+1)(x+2)$  で割ると  $3x-5$  余り,  $(x-1)(x-3)$  で割ると  $2x+3$  余る. この整式  $P(x)$  を  $x+1$  で割った余りを求めよ. また,  $P(x)$  を  $(x+2)(x-3)$  で割った余りを求めよ.

**解説**

(1) 剰余の定理より,  $P(1)=5, P(-2)=-1$

$P(x)$  を 2 次式  $(x-1)(x+2)$  で割った商を  $Q(x)$ ,

余りは 1 次以下であるから,  $ax+b$  とおくと

$$P(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+ax+b$$

$x=1$  を代入して,  $P(1)=a+b \quad \therefore a+b=5 \cdots \textcircled{1}$

$x=-2$  を代入して,  $P(-2)=-2a+b \quad \therefore -2a+b=-1 \cdots \textcircled{2}$

①, ②より,  $a=2, b=3$

よって, 求める余りは,  $2x+3$

**別解**

$x-1$  で割ったときの余りは5 より

$$P(x)=(x-1)(x+2)Q(x)+a(x-1)+5$$

とおける

剰余の定理から  $P(-2)=-1$  より

$$-3a+5=-1 \quad \therefore a=2$$

よって, 余りは  $2(x-1)+5=2x+3$

(2)  $P(x)$  を  $(x+1)(x+2)$ ,  $(x-1)(x-3)$  で割った商をそれぞれ  $Q_1(x)$ ,  $Q_2(x)$  とすると,

$$P(x)=(x+1)(x+2)Q_1(x)+3x-5 \cdots \textcircled{1}$$

$$P(x)=(x-1)(x-3)Q_2(x)+2x+3 \cdots \textcircled{2}$$

①より,  $P(-1)=-8$

よって,  $P(x)$  を  $x+1$  で割った余りは  $-8$  である

①, ②より,  $P(-2)=-11, P(3)=9$

$P(x)$  を  $(x+2)(x-3)$  で割ったときの商を  $Q(x)$ , 余りを  $ax+b$  とおくと

$$P(x)=(x+2)(x-3)Q(x)+ax+b$$

$x=-2$  を代入して,  $P(-2)=-2a+b \quad \therefore -2a+b=-11$

$x=3$  を代入して,  $P(3)=3a+b \quad \therefore 3a+b=9$

これを解いて、 $a=4$ 、 $b=-3$

よって、求める余りは、 $4x-3$

例3

(1) 整式  $x^3+ax^2+x+b$  が、 $x^2-3x+2$  で割り切れるとき、 $a=\boxed{\phantom{00}}$ 、  
 $b=\boxed{\phantom{00}}$  である。

(2)  $a$ 、 $b$  は定数で、 $x$  についての整式  $x^3+ax+b$  は  $(x+1)^2$  で割り切れ  
るとする。このとき、 $a$ 、 $b$  の値を求めよ。

(3) 3 次式  $f(x)$  を  $x^2+x+1$  で割ったときの余りが  $x+1$  で、 $x^2+1$  で割  
ったときの余りが  $x-1$  であるとする。このとき、 $f(x)$  を求めよ。

(4)  $x$  についての整式  $x^3-ax-6$  が  $x^2-2x-b$  で割り切れるとき、 $a$ 、 $b$   
の値を求めよ。

解説

(1)  $x^3+ax^2+x+b$  を  $x^2-3x+2$  で割ったときの商を  $Q$  とすると

$$x^3+ax^2+x+b=(x^2-3x+2)Q$$

$$x^3+ax^2+x+b=(x-1)(x-2)Q$$

$x=1$  を代入して  $a+b+2=0 \cdots \textcircled{1}$

$x=2$  を代入して  $4a+b+10=0 \cdots \textcircled{2}$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より } a=-\frac{8}{3}, b=\frac{2}{3}$$

(2)  $x^3+ax+b=(x+1)^2(x+k)$  とおける

$$x^3+ax+b=x^3+(k+2)x^2+(2k+1)x+k$$

これが  $x$  についての恒等式より

$$k+2=0 \quad \therefore k=-2$$

よって

$$a=-3, b=-2$$

(3) 3 次式  $f(x)$  を  $x^2+x+1$  で割ったときの余りが  $x+1$  であるから、  
 $p \neq 0$  として

$$f(x)=(px+q)(x^2+x+1)+x+1 \cdots \textcircled{1}$$

同様に

$$f(x)=(px+r)(x^2+1)+x-1 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より,

$$(px+q)(x^2+x+1)+x+1=(px+r)(x^2+1)+x-1$$

$$px^3+(p+q)x^2+(p+q+1)x+q+1=px^3+rx^2+(p+1)x+r-1$$

これが  $x$  についての恒等式より

$$p+q=r, p+q+1=p+1, q+1=r-1$$

これを解いて,  $q=0, r=2, p=2$

よって,  $f(x)=2x^3+2x^2+3x+1$

(4) 題意より

$$x^3-ax-6=(x^2-2x-b)(x-\alpha)$$

$$x^3-ax-6=x^3-(\alpha+2)x^2-(b-2\alpha)x+b\alpha$$

これが,  $x$  についての恒等式より

$$\alpha+2=0, b-2\alpha=a, b\alpha=-6$$

$$\therefore \alpha=-2, b=3, a=7$$

[注] (2), (3), (4) のように割り式が  $(ax+b)^2$  や, 因数分解できない式や, 文字を含む式のときは, 恒等式であることを利用して解く。

#### 例4

(1) 整式  $P(x)$  を  $(x-3)^2$  で割った余りが  $2x-5$  であり,  $x-1$  で割った余りが  $5$  であるとき,  $P(x)$  を  $(x-1)(x-3)^2$  で割った余りを求めよ。

(2) 整式  $f(x)$  は  $x-1$  で割ると余りが  $3$  である。また,  $f(x)$  を  $x^2+x+1$  で割ると余りが  $4x+5$  である。このとき,  $f(x)$  を  $x^3-1$  で割ったときの余りを求めよ。

(解説)

(1)  $P(x)$  を  $(x-1)(x-3)^2$  で割ったときの商を  $Q(x)$ , 余りを  $ax^2+bx+c$  とすると

$$P(x)=(x-1)(x-3)^2Q(x)+ax^2+bx+c$$

$P(x)$  を  $(x-3)^2$  で割ったときの余りが  $2x-5$  であり,

$(x-1)(x-3)^2Q(x)$  は  $(x-3)^2$  で割り切れるから,

$ax^2+bx+c$  を  $(x-3)^2$  で割ったときの余りは  $2x-5$  より

$ax^2+bx+c=a(x-3)^2+2x-5$  とおけて,

$$P(x)=(x-1)(x-3)^2Q(x)+a(x-3)^2+2x-5 \cdots \textcircled{1}$$

$P(x)$  を  $x-1$  で割ったときの余りが  $5$  であるから,

剰余の定理より,  $P(1)=5$

①に  $x=1$  を代入して

$$5=4a-3 \quad \therefore a=2$$

よって余りは

$$2(x-3)^2+2x-5=2x^2-10x+13$$

☐ 未知数が  $a, b, c$  の 3 つあるのに対し，条件式は  $x=1, x=3$  を代入して 2 つしか作れないので，余りを恒等式を利用して変形して未知数を減らす。

(2)  $f(x)$  を  $x^3-1$  で割ったときの商を  $Q(x)$ ，余りを  $ax^2+bx+c$  とすると

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^3-1)Q(x) + ax^2+bx+c \\ &= (x-1)(x^2+x+1)Q(x) + ax^2+bx+c \end{aligned}$$

$f(x)$  を  $x^2+x+1$  で割った余りが  $4x+5$  より

$$f(x) = (x-1)(x^2+x+1)Q(x) + a(x^2+x+1) + 4x+5 \cdots \textcircled{1}$$

$f(x)$  を  $x-1$  で割ったときの余りが 3 であるから，

剰余の定理より，  $f(1)=3$

①に  $x=1$  を代入して

$$3=3a+9 \quad \therefore a=-2$$

よって余りは

$$-2(x^2+x+1)+4x+5=-2x^2+2x+3$$

#### 例5

整式  $P(x)$  を  $(x+1)^2$  で割ったときの余りは 9 であり， $(x-1)^2$  で割ったときの余りは 1 である。 $P(x)$  を  $(x+1)^2(x-1)^2$  で割ったときの余りを求めよ。

解説

整式  $P(x)$  を  $(x+1)^2(x-1)^2$  で割ったときの商を  $Q(x)$ ，余りを  $ax^3+bx^2+cx+d$  とすると，

$$P(x) = (x+1)^2(x-1)^2Q(x) + ax^3+bx^2+cx+d$$

$(x+1)^2(x-1)^2Q(x)$  は  $(x+1)^2$  で割り切れるから，

$P(x)$  を  $(x+1)^2$  で割った余りが 9 より

$$ax^3+bx^2+cx+d = (x+1)^2(ax+k)+9$$

同様に， $P(x)$  を  $(x-1)^2$  で割った余りが 1 より

$$ax^3+bx^2+cx+d = (x-1)^2(ax+l)+1$$

よって

$$(x+1)^2(ax+k)+9=(x-1)^2(ax+l)+1$$

$$ax^3+(2a+k)x^2+(a+2k)x+k+9$$

$$=ax^3+(-2a+l)x^2+(a-2l)x+l+1$$

これが  $x$  についての恒等式より

$$2a+k=-2a+l, \quad a+2k=a-2l, \quad k+9=l+1$$

これを解いて

$$a=2, \quad k=-4, \quad l=4$$

よって余りは

$$(x+1)^2(2x-4)+9=2x^3-6x+5$$

**補1**

整式  $P(x)$  を  $x^2-2x+1$  で割ると  $x-2$  余り,  $2x^2+3x+1$  で割ると  $2x+3$  余るとする。

(1)  $P(x)$  を  $2x^2-x-1$  で割ったときの余りを求めよ。

(2) 条件を満たすような 3 次式  $P(x)$  を求めよ。

**解説**

(1)  $P(x)$  を  $x^2-2x+1$ ,  $2x^2+3x+1$  すなわち  $(x-1)^2$ ,  $(2x+1)(x+1)$  で割ったときの商を, それぞれ  $Q_1(x)$ ,  $Q_2(x)$  とすると

$$P(x) = (x-1)^2 Q_1(x) + x-2 \cdots \textcircled{1}$$

$$P(x) = (2x+1)(x+1) Q_2(x) + 2x+3 \cdots \textcircled{2}$$

$P(x)$  を  $2x^2-x-1$  すなわち  $(2x+1)(x-1)$  で割ったときの商を  $Q(x)$ , 余りを  $ax+b$  とすると

$$P(x) = (2x+1)(x-1) Q(x) + ax+b \cdots \textcircled{3}$$

①から  $P(1) = 1-2 = -1$ , ②から  $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right) + 3 = 2$  より

$$a+b = -1, \quad -\frac{1}{2}a+b = 2 \quad \therefore a = -2, \quad b = 1$$

よって, 求める余りは  $-2x+1$

(2)  $P(x)$  は 3 次式であるから, ① より

$$P(x) = (px+q)(x-1)^2 + x-2$$

とおける

②から  $P\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$ ,  $P(-1) = 1$  より

$$-p+2q=4, \quad -p+q=1 \quad \therefore p=2, \quad q=3$$

よって

$$P(x) = (2x+3)(x-1)^2 + x-2 = 2x^3 - x^2 - 3x + 1$$

**補2**

整式  $P(x)$  を  $x^2+x-6$  および  $x^2-x-12$  で割ると余りがそれぞれ  $(a-4)x-1$  および  $2ax+5a-1$  であるとする。ただし  $a$  は定数とする。

(1)  $a$  の値を求めよ。

(2)  $P(x)$  を  $x^3-3x^2-10x+24$  で割った余りを求めよ。

**解説**

(1)  $P(x)$  を  $x^2+x-6$  すなわち  $(x-2)(x+3)$  で割ったときの商を  $Q(x)$  とすると

$$P(x) = (x-2)(x+3)Q(x) + (a-4)x-1 \cdots \textcircled{1}$$

また,  $P(x)$  を  $x^2-x-12$  すなわち  $(x+3)(x-4)$  で割ったときの商を  $R(x)$  とすると

$$P(x) = (x+3)(x-4)R(x) + 2ax+5a-1 \cdots \textcircled{2}$$

①から  $P(-3) = -3a+11$ , ②から  $P(-3) = -a-1$  より

$$-3a+11 = -a-1 \quad \therefore a=6$$

(2)  $a=6$  を①, ②に代入すると

$$P(x) = (x-2)(x+3)Q(x) + 2x-1$$

$$P(x) = (x+3)(x-4)R(x) + 12x+29$$

より,  $P(2)=3$ ,  $P(-3)=-7$ ,  $P(4)=77$

$P(x)$  を  $x^3-3x^2-10x+24$  すなわち  $(x-2)(x+3)(x-4)$  で割ったときの商を  $A(x)$ , 余りを  $bx^2+cx+d$  とすると

$$P(x) = (x-2)(x+3)(x-4)A(x) + bx^2+cx+d$$

$$P(2)=3 \text{ より } 4b+2c+d=3 \cdots \textcircled{3}$$

$$P(-3)=-7 \text{ より } 9b-3c+d=-7 \cdots \textcircled{4}$$

$$P(4)=77 \text{ より } 16b+4c+d=77 \cdots \textcircled{5}$$

③, ④, ⑤より,  $b=5$ ,  $c=7$ ,  $d=-31$

よって, 求める余りは  $5x^2+7x-31$

**別解**

$P(x)$  を  $(x+3)(x-4)$  で割ったとき余りが  $16x+29$  より

$$P(x) = (x-2)(x+3)(x-4)A(x) + bx^2+cx+d$$

$$= (x-2)(x+3)(x-4)A(x) + b(x+3)(x-4) + 12x+29$$

と表すことができる

$P(2)=3$  より

$$-10b+53=3 \quad \therefore b=5$$

よって, 求める余りは  $5(x+3)(x-4) + 12x+29 = 5x^2+7x-31$



**補3**

整式  $P(x)$  を  $x+1$  で割ったときの余りが  $-9$ ,  $(x-2)^3$  で割ったときの余りが  $3x^2-2x+4$  であるとき, 次の問いに答えよ。

(1)  $P(x)$  を  $(x+1)(x-2)$  で割ったときの余りを求めよ。

(2)  $P(x)$  を  $(x-2)^2$  で割ったときの余りを求めよ。

(3)  $P(x)$  を  $(x+1)(x-2)^2$  で割ったときの余りを求めよ。

**解説**

(1)  $P(x)$  を  $(x+1)(x-2)$  で割ったときの商を  $Q(x)$ , 余りを  $ax+b$  とすると

$$P(x) = (x+1)(x-2)Q(x) + ax + b$$

ここで,  $P(x)$  を  $x+1$  で割ると余りは  $-9$  であるから,  $P(-1) = -9$

また,  $P(x)$  を  $(x-2)^3$  で割ったときの商を  $Q_1(x)$  とすると,

$$P(x) = (x-2)^3 Q_1(x) + 3x^2 - 2x + 4$$

から,  $P(2) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 4 = 12$  より

$$-a + b = -9, \quad 2a + b = 12 \quad \therefore a = 7, \quad b = -2$$

よって, 求める余りは  $7x - 2$

$$(2) P(x) = (x-2)^3 Q_1(x) + 3x^2 - 2x + 4$$

$$= (x-2)^3 Q_1(x) + 3(x-2)^2 + 10x - 8$$

$$= (x-2)^2 \{ (x-2) Q_1(x) + 3 \} + 10x - 8$$

よって, 求める余りは  $10x - 8$

(3)  $P(x)$  を  $(x+1)(x-2)^2$  で割ったときの商を  $Q_2(x)$ ,

余りを  $px^2 + qx + r$  とすると

$$P(x) = (x+1)(x-2)^2 Q_2(x) + px^2 + qx + r$$

$(x+1)(x-2)^2 Q_2(x)$  は  $(x-2)^2$  で割り切れるから,  $P(x)$  を  $(x-2)^2$  で割った

ときの余りと  $px^2 + qx + r$  を  $(x-2)^2$  で割ったときの余りは等しい

よって

$$P(x) = (x+1)(x-2)^2 Q_2(x) + p(x-2)^2 + 10x - 8$$

とおける

$P(-1) = -9$  より

$$9p - 18 = -9 \quad \therefore p = 1$$

よって, 求める余りは,  $1 \cdot (x-2)^2 + 10x - 8 = x^2 + 6x - 4$

**補4**

$(x+1)^7$  を  $x^2-1$  で割った余りを求めよ. また,  $x^7-1$  を  $(x-1)^2$  で割った余りを求めよ.

**解説**

$(x+1)^7$  を  $x^2-1$  で割った商を  $Q(x)$ , 余りを  $ax+b$  とおくと

$$(x+1)^7 = (x^2-1)Q(x) + ax + b$$

$$(x+1)^7 = (x+1)(x-1)Q(x) + ax + b$$

$x=1$  を代入して,  $2^7 = a + b$

$x=-1$  を代入して  $0 = -a + b \quad \therefore a=64, b=64$

よって,  $(x+1)^7$  を  $x^2-1$  で割った余りは  $64x+64$

$x^7-1$  を  $(x-1)^2$  で割った余りは,

$t=x-1$  とおくと,  $x=t+1$

$$x^7-1 = (t+1)^7-1$$

$$= {}_7C_0 t^7 + {}_7C_1 t^6 + \cdots + {}_7C_5 t^2 + {}_7C_6 t + {}_7C_7 - 1$$

これを  $t^2$  で割った余りは,  $7t = 7(x-1) = 7x-7$

**別解**

$x^7-1$  を  $(x-1)^2$  で割った商を  $R(x)$ , 余りを  $ax+b$  とおくと

$$x^7-1 = (x-1)^2 R(x) + ax + b \cdots \textcircled{1}$$

両辺  $x$  で微分して

$$7x^6 = 2(x-1)R(x) + (x-1)^2 R'(x) + a \cdots \textcircled{2}$$

①, ②に  $x=1$  を代入して

$$a+b=0, a=7 \quad \therefore b=-7$$

よって, 余りは  $7x-7$