

4.4 2次曲線(4)

(1) 2次曲線と軌跡

軌跡が2次曲線となるようなものについて考える。

例1

座標平面上に、原点 O を中心とする半径 $2a$ の円 C と、定点 $F(-2b, 0)$ ($0 < b < a$) をとる。 C 上の点を Q とし、線分 FQ の垂直二等分線と線分 OQ との交点を P とする。

(1) 線分の長さの和 $FP + PO$ は、点 Q の位置には無関係に一定であることを示せ。

(2) 点 Q が C 上を動くとき、点 P の軌跡の方程式を求めよ。

解説

(1) 点 P は線分 FQ の垂直二等分線上にあるから $FP = QP$ より

$$FP + PO = QP + PO = QO = 2a$$

よって、線分の長さの和 $FP + PO$ は点 Q の位置には無関係に $2a$ (一定) である

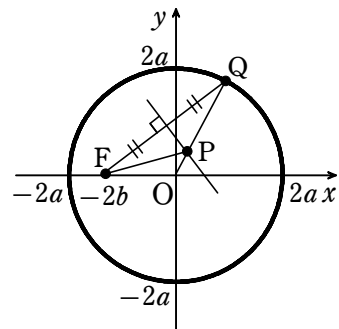
(2) 点 P は2点 F, O からの距離の和が $2a$ で一定な点であるから、その軌跡は F, O を焦点とする楕円である

この楕円の中心は線分 FO の中点 $(-b, 0)$ で、長軸の長さは2焦点からの距離の和 $2a$ に等しい
短軸の長さを $2c$ とおくと、焦点間の距離が

$2b = 2\sqrt{a^2 - c^2}$ であるから、 $c^2 = a^2 - b^2$ より

点 P の軌跡の方程式は

$$\frac{(x+b)^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - b^2} = 1$$



例2

(1) 点 A (2, 0) を中心とする半径 1 の円と直線 $x = -1$ の両方に接し、点 A を内部に含まない円の中心の軌跡は放物線を描く。この放物線の方程式、焦点の座標、準線の方程式を求めよ。

(2) $a > 0$ に対して、 $Q(-a, 0)$ とする。(1) の放物線上の点 P が、 $AP = AQ$ を満たすとき、直線 PQ の方程式を求めよ。

解説

(1) 与えられた条件を満たして動く円の中心を B とする

2 点 A, B 間の距離は、点 B と直線 $x = -2$ の距離に等しいから
点 B の軌跡は、

焦点の座標が (2, 0)、準線の方程式が $x = -2$ の放物線であり、
この放物線の方程式は、 $y^2 = 4 \cdot 2x \quad \therefore y^2 = 8x$

別解

B(x, y) とおくと、 $PH = PA$ より

$$PH^2 = PA^2$$

$$|x + 2|^2 = (x - 2)^2 + y^2$$

$$\therefore y^2 = 8x$$

(2) 右図のように、点 P から準線に下ろした
垂線の足を H とする

$AP = PH$, $AP = AQ$ より、 $PH = AQ$

$PH = AQ = a + 2$ であるから、

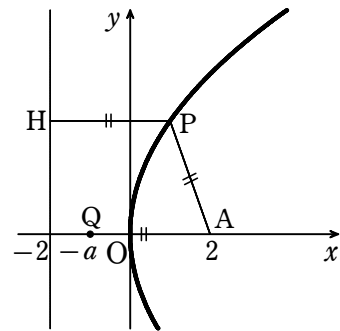
P の x 座標は a である

よって、

点 P の座標は、 $(a, \pm 2\sqrt{2a})$

直線 PQ の方程式は、 $y = \frac{\pm 2\sqrt{2a}}{a - (-a)}(x + a)$

$$\therefore y = \pm \sqrt{\frac{2}{a}}(x + a)$$



例3

座標平面上に、原点を中心とする半径 3 の円 A と、点 (-1, 0) を中心とする半径 1 の円 B がある。円 A と内接し、円 B と外接する円の中心が描く軌跡を求めよ。

解説

円 A の中心を A, 円 B の中心を B, 円 A と内接し, 円 B と外接する円の中心を P, 半径を r とする.

$AP=3-r$, $BP=1+r$ より

$$AP+BP=4 \dots \textcircled{1}$$

よって, 点 P は, 2 点 A, B を焦点とし, 焦点からの距離の和が 4 である楕円である

楕円の中心は $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$ であるから,

x 軸方向に $\frac{1}{2}$ だけ平行移動すると, 焦点は $\left(\pm\frac{1}{2}, 0\right)$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0) \text{ とおくと,}$$

$$\text{条件より, } 2a=4, \quad a^2-b^2=\frac{1}{4} \quad \therefore a^2=4, b^2=\frac{15}{4}$$

$$\text{よって, } \frac{x^2}{4} + \frac{4}{15}y^2 = 1$$

求める軌跡は, この楕円を x 軸方向に $-\frac{1}{2}$ だけ平行移動したものより

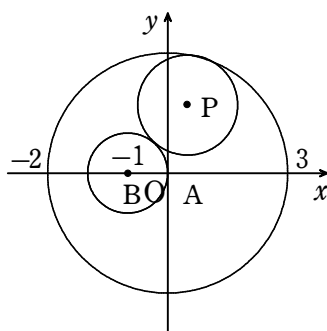
$$\frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2}{4} + \frac{4}{15}y^2 = 1$$

別解

$P(x, y)$ として, $\textcircled{1}$ より

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x+1)^2+y^2} = 4$$

を変形してもよい



例4

(1) 点 $(3, 0)$ を通り, 円 $(x+3)^2+y^2=4$ と互いに外接する円の中心 (X, Y) の軌跡を求めよ.

(2) (1) の軌跡上の点と定点 $(0, a)$ との距離の最小値を求めよ.

解説

(1) 点 $(3, 0)$ を F, 円 $(x+3)^2+y^2=4$ の中心を F' とおくと, $F'(-3, 0)$ 点 (X, Y) を P とおくと, 条件より

$$PF' - PF = 2 \dots \textcircled{1}$$

線分 FF' の中点は原点であるから、

点 P は双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0, b > 0$) 上を動く

$$|PF' - PF| = 2a \text{ より, } 2 = 2a \quad \therefore a = 1$$

$$3 = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ より, } 9 = 1 + b^2 \quad \therefore b^2 = 8$$

よって、点 P は双曲線 $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$ 上を動く

ここで、 P が x 軸上にあるとき $P(1, 0)$ であるから、

求める軌跡は双曲線の一部 $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$ ($x \geq 1$)

別解

P を (x, y) として、①より

$$\sqrt{(X+3)^2 + Y^2} = \sqrt{(X-3)^2 + Y^2} + 2$$

を変形してもよい。

(2) 軌跡上の点 (x, y) と定点 $(0, a)$ との距離を l とすると

$$l^2 = x^2 + (y - a)^2$$

ここで、 $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$ ($x \geq 1$)、すなわち $x^2 = 1 + \frac{y^2}{8}$ より

$$l^2 = 1 + \frac{y^2}{8} + y^2 - 2ay + a^2 = \frac{9}{8}y^2 - 2ay + a^2 + 1$$

$$= \frac{9}{8}\left(y - \frac{8}{9}a\right)^2 + \frac{a^2}{9} + 1$$

$$l = \sqrt{\frac{9}{8}\left(y - \frac{8}{9}a\right)^2 + \frac{a^2}{9} + 1}$$

$y = \frac{8}{9}a$ のとき、 l は最小

$$\text{このとき, } x = \sqrt{\frac{8}{81}a^2 + 1}$$

よって、 $x = \sqrt{\frac{8}{81}a^2 + 1}$ 、 $y = \frac{8}{9}a$ のとき最小で

$$\text{最小値 } \sqrt{\frac{a^2}{9} + 1} = \frac{\sqrt{a^2 + 9}}{3}$$

別解 双曲線の媒介変数表示を用いてもよい。

(2) 離心率

放物線は、点 P から焦点 F までの距離 PF と、準線 l までの距離 PH が等しい点 P の軌跡として定義された。

楕円や双曲線も、放物線の場合と同様に、1 つの焦点と 1 つの直線をもとに考えることができる。

例5

$a > 0$ とし、点 $P(x, y)$ は、 y 軸からの距離 d_1 と点 $(2, 0)$ からの距離 d_2 が $ad_1 = d_2$ を満たすものとする。 a が次の値のとき、点 $P(x, y)$ の軌跡を求めよ。

(1) $a = \frac{1}{2}$

(2) $a = 1$

(3) $a = 2$

(解説)

$$ad_1 = d_2 \text{ より, } a^2 d_1^2 = d_2^2$$

$$d_1 = |x|, d_2 = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} \text{ より}$$

$$a^2 x^2 = (x-2)^2 + y^2$$

(1) $a = \frac{1}{2}$ のとき

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 x^2 = (x-2)^2 + y^2$$

$$\therefore \frac{9\left(x - \frac{8}{3}\right)^2}{16} + \frac{3}{4}y^2 = 1$$

よって、 $a = \frac{1}{2}$ のとき、点 P の軌跡は

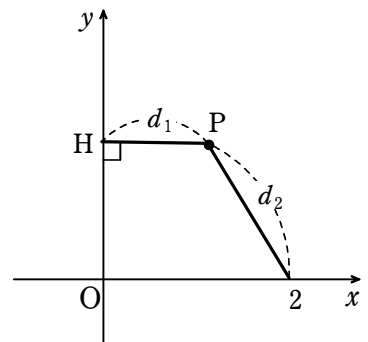
$$\text{楕円 } \frac{9\left(x - \frac{8}{3}\right)^2}{16} + \frac{3}{4}y^2 = 1$$

(2) $a = 1$ のとき

$$1^2 \cdot x^2 = (x-2)^2 + y^2 \quad \therefore x = \frac{1}{4}y^2 + 1$$

よって、 $a = 1$ のとき、点 P の軌跡は

$$\text{放物線 } x = \frac{1}{4}y^2 + 1$$



(3) $a=2$ のとき

$$2^2 \cdot x^2 = (x-2)^2 + y^2 \quad \therefore \frac{9\left(x+\frac{2}{3}\right)^2}{16} - \frac{3}{16}y^2 = 1$$

よって、 $a=2$ のとき、点 P の軌跡は

$$\text{双曲線} \quad \frac{9\left(x+\frac{2}{3}\right)^2}{16} - \frac{3}{16}y^2 = 1$$

一般に、定点 F からの距離と、F を通らない定直線 l からの距離の比が $e:1$ である点 P の軌跡は、 e の値によって次のようになる。

$0 < e < 1$ のとき

F を焦点の 1 つとする楕円

$e=1$ のとき

F を焦点、 l を準線とする放物線

$e > 1$ のとき

F を焦点の 1 つとする双曲線

この e の値を、2 次曲線の離心率といい、直線 l を準線という。

補足 e が 0 に近いほど、点 P の軌跡は円に近づく。

(3) 2 次曲線と円錐曲線

円、楕円、双曲線、放物線をまとめて 2 次曲線というが、これら 4 種の曲線は、円錐をその頂点を通らない平面で切った切り口の曲線であることが知られている。そのため、2 次曲線を円錐曲線ともいう。さらに、円と楕円は、直円柱をその軸と交わる平面で切った切り口の曲線でもある。

例6

座標空間に 2 点 A (0, 1, 1), B (2, 1, 1) がある。xy 平面上に点 P があるとき、次の問いに答えよ。

(1) $\triangle ABP$ が正三角形となるとき、点 P の座標を求めよ。

(2) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AP}$ のなす角が 60° となるように点 P が動くとき、xy 平面上的点 P の軌跡の方程式を求め、それが表す図形の概形を図示せよ。

解説

(1) $P(x, y, 0)$ とおくと, $AP^2 = AB^2 = 4$, $BP^2 = 4$ より

$$x^2 + (y-1)^2 + (-1)^2 = 4, \quad (x-2)^2 + (y-1)^2 + (-1)^2 = 4$$

$$4x - 4 = 0 \quad \therefore x = 1$$

このとき,

$$(y-1)^2 = 2 \quad \therefore y = 1 \pm \sqrt{2} \quad \therefore P(1, 1 \pm \sqrt{2}, 0)$$

(2) $P(x, y, 0)$ とおくと $\overrightarrow{AP} = (x, y-1, -1)$

これと $\overrightarrow{AB} = (2, 0, 0)$ が 60° の角をなすから

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AP}| |\overrightarrow{AB}| \cos 60^\circ$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} = 2x, \quad |\overrightarrow{AP}| = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + (-1)^2}, \quad |\overrightarrow{AB}| = 2 \text{ より}$$

$$2x = \sqrt{x^2 + (y-1)^2 + 1}$$

$$4x^2 = x^2 + (y-1)^2 + 1$$

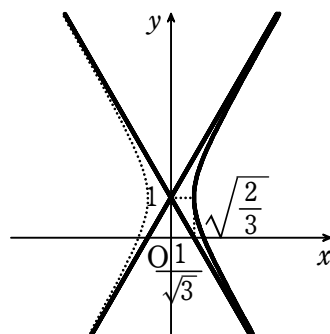
$$3x^2 - (y-1)^2 = 1$$

$$\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AB} > 0 \text{ より, } x > 0$$

よって, 双曲線 $3x^2 - (y-1)^2 = 1$ の

$x > 0$ の部分

注 AP は AB を軸とする円錐の母線を表している。



例9

xyz 空間において, 点 $A(1, 0, 1)$ を中心とする半径 1 の球を S とする. 点 $B(0, 0, 3)$ に点光源があるとき, xy 平面上で球 S の影になる部分について, それを表す式を求め, xy 平面上に図示せよ.

解説

球面 S の方程式は, $(x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$

S 上の点 $P(X, Y, Z)$ と点 $B(0, 0, 3)$ を通る直線が

xy 平面と交わる点を $Q(x, y, 0)$ とすると,

k を実数として $\overrightarrow{BP} = k\overrightarrow{BQ}$ と表せる

よって

$$X=kx, Y=ky, Z-3=-3k$$

$$(Z=3-3k)$$

ここで, $(X-1)^2+Y^2+(Z-1)^2=1$ より

$$(x^2+y^2+9)k^2-2(x+6)k+4=0$$

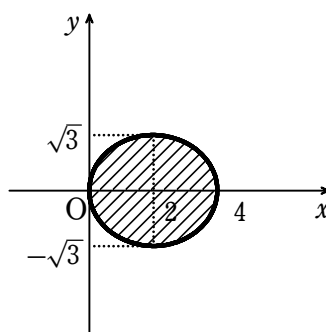
この判別式を D とすると,

k は実数であるから, 判別式 $D \geq 0$ より

$$\frac{D}{4} = (x+6)^2 - 4(x^2+y^2+9) \geq 0$$

$$3(x-2)^2 + 4y^2 \leq 12$$

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{y^2}{3} \leq 1 \text{ かつ } z=0$$



別解

$$\overrightarrow{BA} = (1, 0, -2)$$

S の影上の点を $P(x, y, 0)$ とおくと, $\overrightarrow{BP} = (x, y, -3)$

直線 BP が S と接するときの接点を T , $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BP}$ のなす角を α とすると

$$\cos \alpha = \frac{BT}{BA} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

P を動かして, $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BP}$ のなす角は θ とすると

$0 \leq \theta \leq \alpha$ であるから, $\cos \alpha \leq \cos \theta \leq 1$ より

$$|\overrightarrow{BP}| |\overrightarrow{BA}| \cos \alpha \leq \overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BA} \leq |\overrightarrow{BP}| |\overrightarrow{BA}|$$

$$\sqrt{x^2+y^2+9} \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \leq x+6 \leq \sqrt{x^2+y^2+9} \cdot \sqrt{5}$$

$\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{BA} \geq 0$ であるから, $x \geq -6$ より

$$(x+6)^2 \geq 4(x^2+y^2+9)$$

$$3x^2 - 12x + 4y^2 \leq 0$$

$$3(x-2)^2 + 4y^2 \leq 12$$

$$\therefore \frac{(x-2)^2}{4} + \frac{y^2}{3} \leq 1, z=0$$

補1

(1) x 軸上の動点 $P(a, 0)$, y 軸上の動点 $Q(0, b)$ が $PQ=1$ を満たしながら動くとき, 線分 PQ を $1:2$ に内分する点 T の軌跡の方程式を求め, その軌跡を図示せよ.

(2) 線分 PQ を対角線とする正方形の P, Q 以外の 2 つの頂点は, それぞれ直線 $y=x$, $y=-x$ 上にあることを示せ.

解説

(1) $PQ=1$ より, $a^2 + b^2 = 1$

$T(x, y)$ とおくと

$$x = \frac{2}{3}a, \quad y = \frac{b}{3}$$

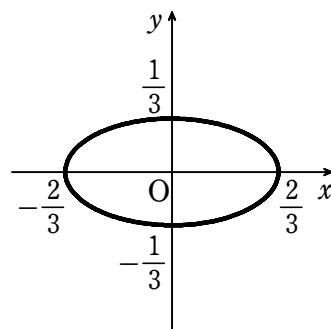
$$a = \frac{3}{2}x, \quad b = 3y$$

より

$$\frac{9}{4}x^2 + 9y^2 = 1$$

$$9x^2 + 36y^2 = 4$$

グラフは右図



(2) P, Q 以外の頂点を R, S , 線分 PQ の中点を M とすると

$$M\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right).$$

四角形 $PRQS$ が正方形となるときの

$$\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{MR}, \quad MR = \frac{1}{2}, \quad \overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{MS}, \quad MS = \frac{1}{2}$$

$\overrightarrow{PQ}$ と垂直で大きさが $\frac{1}{2}$ であるベクトルは, $\pm \frac{1}{2}(b, a)$

$\overrightarrow{MR} = \frac{1}{2}(b, a)$, $\overrightarrow{MS} = -\frac{1}{2}(b, a)$ とすると, R, S の座標はそれぞれ

$$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right), \quad \left(\frac{a-b}{2}, \frac{b-a}{2}\right)$$

より, R は直線 $y=x$, S は直線 $y=-x$ 上にある

補2

点 $(1, 0)$ と y 軸との距離の比が $1:r (r>0)$ である点 $P(x, y)$ の軌跡の方程式, および軌跡と x 軸との交点を求め, その軌跡の表す図形の概形をかけ.

(解説)

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} : |x| = 1 : r \text{ より}$$

$$r\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = |x|$$

$$r^2(x^2 - 2x + 1 + y^2) = x^2$$

よって, 軌跡の方程式は

$$(r^2 - 1)x^2 + r^2y^2 - 2r^2x + r^2 = 0 \dots \textcircled{1}$$

①で, $y=0$ とすると

$$(r^2 - 1)x^2 - 2r^2x + r^2 = 0 \dots \textcircled{2}$$

②の解は

$$r=1 \text{ のとき, } -2x+1=0 \quad \therefore x=\frac{1}{2}$$

$r \neq 1 (0 < r < 1, 1 < r)$ のとき

$$x = \frac{r^2 \pm \sqrt{r^4 - r^2(r^2 - 1)}}{r^2 - 1} = \frac{r}{r \mp 1} \text{ (複号同順)}$$

よって, 軌跡と x 軸との交点の座標は

$$r=1 \text{ のとき, } \left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

$$r \neq 1 \text{ のとき, } \left(\frac{r}{r-1}, 0\right), \left(\frac{r}{r+1}, 0\right)$$

$$\text{また, } \frac{r}{r+1} - \frac{r}{r-1} = \frac{-2r}{(r+1)(r-1)} \text{ より}$$

$$r > 1 \text{ のとき, } 0 < \frac{r}{r+1} < \frac{r}{r-1}$$

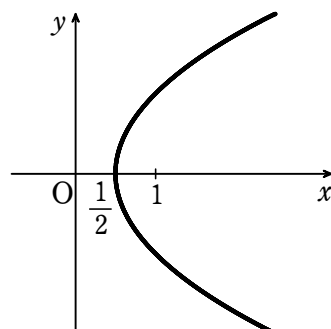
$$0 < r < 1 \text{ のとき, } \frac{r}{r-1} < 0 < \frac{r}{r+1}$$

軌跡の表す図形は

(i) $r=1$ のとき, ①より

$$y^2 = 2x - 1 = 4 \times \frac{1}{2} \left(x - \frac{1}{2} \right)$$

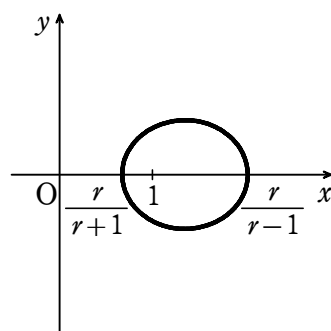
よって, 放物線



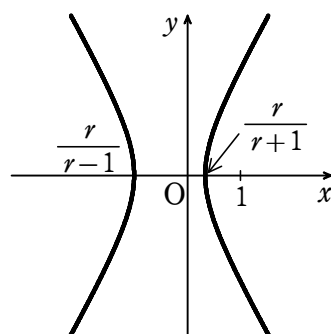
(ii) $r \neq 1$ のとき, ①より

$$\frac{\left(x - \frac{r^2}{r^2-1} \right)^2}{\left(\frac{r}{r^2-1} \right)^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{r^2-1}} = 1$$

(ア) $r > 1$ のとき, 楕円



(イ) $0 < r < 1$ のとき, 双曲線



補3

a を 0 でない実数とする。中心の xyz 座標が $(0, 0, 1)$ で半径が 1 の球 G と点 $P(0, -2, a)$ に関して、点 P を通る直線が球 G と共有点をもつように動くとき、この直線と xy 平面の交点全体からなる xy 平面上の領域の境界線を表す方程式を求めよ。また、その方程式が表す図形を 0 でない実数 a に関して分類せよ。

解説

点 P を通る直線と xy 平面の交点を

$Q(X, Y, 0)$ とする

直線 PQ は、 t を実数として

$$(x, y, z) = (0, -2, a) + t(X-0, Y-(-2), 0-a)$$

$$\therefore x = Xt, \quad y = (Y+2)t-2, \quad z = -at+a \quad \cdots \textcircled{1}$$

また、球 G の方程式は

$$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1 \quad \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$(Xt)^2 + \{(Y+2)t-2\}^2 + \{-at+a-1\}^2 = 1$$

$$\{X^2 + (Y+2)^2 + a^2\}t^2 - 2\{2(Y+2) + a(a-1)\}t + a^2 - 2a + 4 = 0 \quad \cdots \textcircled{3}$$

直線 PQ が G と共有点をもつとき、 t の方程式③が実数解をもつ

ここで、 $a \neq 0$ から、 $X^2 + (Y+2)^2 + a^2 \neq 0$ より、

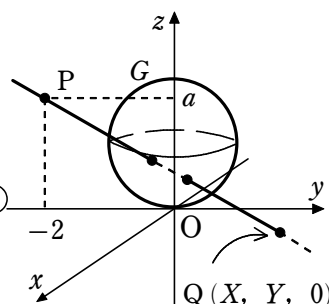
③は t についての 2 次方程式である

③の判別式を D とすると、 $D \geq 0$ より

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= \{2(Y+2) + a(a-1)\}^2 - \{X^2 + (Y+2)^2 + a^2\}(a^2 - 2a + 4) \\ &= \{2Y + (a^2 - a + 4)\}^2 - \{X^2 + Y^2 + 4Y + (a^2 + 4)\}(a^2 - 2a + 4) \\ &= -(a^2 - 2a + 4)X^2 + \{4 - (a^2 - 2a + 4)\}Y^2 + \{4(a^2 - a + 4) - 4(a^2 - 2a + 4)\}Y \\ &\quad + (a^2 - a + 4)^2 - (a^2 + 4)(a^2 - 2a + 4) \\ &= -(a^2 - 2a + 4)X^2 - (a^2 - 2a)Y^2 + 4aY + a^2 \geq 0 \\ \therefore (a^2 - 2a + 4)X^2 + (a^2 - 2a)Y^2 - 4aY - a^2 &\leq 0 \end{aligned}$$

よって、点 P を通る直線が球 G と共有点をもつように動くとき、この直線と xy 平面の交点 $Q(X, Y, 0)$ 全体からなる xy 平面上の領域の境界線を表す方程式は

$$(a^2 - 2a + 4)x^2 + (a^2 - 2a)y^2 - 4ay - a^2 = 0 \quad \cdots \textcircled{4}$$



次に、④が表す図形を求める

$a^2 - 2a + 4 = (a - 1)^2 + 3 > 0$ であるから、

(i) $a^2 - 2a = 0$ ($a \neq 0$) , すなわち $a = 2$ のとき

④は、 $4x^2 - 8y - 4 = 0$, $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}$ (放物線)

(ii) $a^2 - 2a > 0$, すなわち $a < 0$, $2 < a$ のとき

④より

$$(a^2 - 2a + 4)x^2 + (a^2 - 2a)\left(y - \frac{2}{a-2}\right)^2 = \frac{a(a^2 - 2a + 4)}{a-2} \dots \textcircled{5}$$

$a^2 - 2a + 4 \neq a^2 - 2a$ であり、 $\frac{a(a^2 - 2a + 4)}{a-2} > 0$ であるから、

⑤は楕円を表す

(iii) $a^2 - 2a < 0$ すなわち $0 < a < 2$ のとき

(ii)と同様に、④より⑤が得られる

$a^2 - 2a + 4$ と $a^2 - 2a$ は異符号で、 $\frac{a(a^2 - 2a + 4)}{a-2} \neq 0$ であるから、

⑤は双曲線を表す

(i)~(iii)より、求める図形は

$a = 2$ のとき、放物線、

$a < 0$, $2 < a$ のとき、楕円、

$0 < a < 2$ のとき、双曲線

z