

2.2 2次曲線(2)

(1) 2次曲線と直線の共有点

2次曲線と直線の共有点の座標は、それらの方程式を連立させた連立方程式の解として得られる。

例1

楕円 $x^2 + 2y^2 = 1$ と直線 $y = x + k$ が異なる 2 点で交わるような定数 k の値の範囲は $\boxed{}$ であり、このとき 2 つの交点の中点は常に直線 $\boxed{}$ 上にある。

(解説)

$$x^2 + 2y^2 = 1 \cdots \textcircled{1}$$

$$y = x + k \cdots \textcircled{2} \text{ とする}$$

①を②より

$$x^2 + 2(x + k)^2 = 1$$

$$3x^2 + 4kx + (2k^2 - 1) = 0 \cdots \textcircled{3}$$

楕円と直線が異なる 2 点で交わるから、

③の判別式を D とすると、 $D > 0$ より

$$\frac{D}{4} = (2k)^2 - 3(2k^2 - 1) = -2k^2 + 3 > 0$$

$$k^2 < \frac{3}{2} \quad \therefore -\frac{\sqrt{6}}{2} < k < \frac{\sqrt{6}}{2}$$

このとき、2 つの交点を $A(\alpha, \alpha + k)$, $B(\beta, \beta + k)$,

線分 AB の中点を $M(X, Y)$ とすると

α, β は③の異なる 2 つの解であるから、

$$\text{解と係数の関係より、} \alpha + \beta = -\frac{4}{3}k$$

$$\text{よって、} X = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{2} \left(-\frac{4}{3}k \right) = -\frac{2}{3}k \quad \text{よって} \quad k = -\frac{3}{2}X$$

$$\text{ゆえに} \quad Y = X + k = X + \left(-\frac{3}{2}X \right) = -\frac{1}{2}X$$

したがって、 M は常に直線 $y = -\frac{1}{2}x$ 上にある

別解

楕円を円に変換するような変換で、楕円と直線を変換して、中心と直線の距離で考えてもよい。

一般に、2次曲線と直線の方程式から1文字を消去して2次方程式が得られる場合、その2次方程式の実数解の個数と、2次曲線と直線の共有点の個数は一致する。

特に、1文字を消去して得られた2次方程式が重解をもつとき、直線は2次曲線に接するといい、その直線を2次曲線の接線、共有点を接点という。

例2

楕円 $C: x^2 + 9y^2 = 1$ と直線 $\ell: y = t(x - 3)$ を考える。ただし、 t は実数とする。

- (1) C と ℓ が相異なる2つの共有点をもつような t の値の範囲を求めよ。また、これら2点を結ぶ線分の中点 M の座標を t を用いて表せ。
(2) t の値が(1)で求めた範囲を動くとき、点 M の描く図形を図示せよ。

解説

(1) $x^2 + 9\{t(x - 3)\}^2 = 1$ として、

$$(9t^2 + 1)x^2 - 54t^2x + (81t^2 - 1) = 0 \dots \textcircled{1}$$

①の判別式を D とすると、 $D > 0$ より

$$\frac{D}{4} = (-27t^2)^2 - (9t^2 + 1)(81t^2 - 1) = -72t^2 + 1 > 0$$

$$\therefore -\frac{\sqrt{2}}{12} < t < \frac{\sqrt{2}}{12}$$

C と ℓ の共有点の x 座標を α, β ($\alpha < \beta$) とおくと、
 α, β は ① の実数解であるから、

解と係数の関係より、 $\alpha + \beta = \frac{54t^2}{9t^2 + 1}$

点 M の座標を (X, Y) とおくと

$$X = \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{27t^2}{9t^2 + 1},$$

$$Y = t(X - 3) = t\left(\frac{27t^2}{9t^2 + 1} - 3\right) = -\frac{3t}{9t^2 + 1}$$

よって、点 M の座標は $\left(\frac{27t^2}{9t^2+1}, -\frac{3t}{9t^2+1}\right)$

(2) (1) より

$$X = -9t \cdot \left(-\frac{3t}{9t^2+1}\right) = -9tY \dots \textcircled{2}$$

$$X = 3 - \frac{3}{9t^2+1} \neq 3 \text{ であるから, } Y = t(X-3) \text{ より, } t = \frac{Y}{X-3}$$

②より

$$X = -\frac{9Y^2}{X-3}$$

$$X(X-3) + 9Y^2 = 0$$

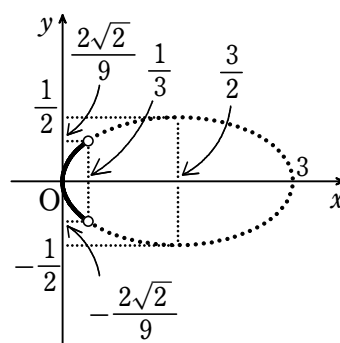
$$\left(X - \frac{3}{2}\right)^2 + 9Y^2 = \frac{9}{4}$$

$$0 \leq 3 - \frac{3}{9t^2+1} < \frac{1}{3} \text{ より, } 0 \leq X < \frac{1}{3}$$

よって、点 M の軌跡は

$$\text{楕円 } \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 9y^2 = \frac{9}{4} \text{ の } 0 \leq x < \frac{1}{3} \text{ の部分}$$

点 M が描く図形は右図



例3

連立不等式 $x^2 + 4y^2 \leq 4$, $x + 2y \geq 2$ の表す領域を D とする。点 (x, y) が D 内を動くとき、 $2x + y$ の最小値は ア である。また、最大値は イ であり、そのときの x, y は $x = \text{ウ}$, $y = \text{エ}$ である。

解説

$x^2 + 4y^2 \leq 4$, $x + 2y \geq 2$ の表す領域 D は、
右図の斜線部分。ただし、境界線を含む。

$2x + y = k$ とおくと

$$y = -2x + k \cdots \textcircled{1}$$

k は、直線①が点 $(0, 1)$ を通るとき最小

$$\text{最小値 } k = 2 \cdot 0 + 1 = 1$$

k は、直線①が楕円 $x^2 + 4y^2 = 4 \cdots \textcircled{2}$ に

第1象限の点で接するとき最大

$$x^2 + 4(-2x + k)^2 = 4$$

$$17x^2 - 16kx + 4(k^2 - 1) = 0 \cdots \textcircled{3}$$

③の判別式を D_0 とすると、 $D_0 = 0$ より、

$$\frac{D_0}{4} = (-8k)^2 - 17 \cdot 4(k^2 - 1) = -4(k^2 - 17) = 0$$

$$k^2 - 17 = 0 \quad \therefore k = \pm \sqrt{17}$$

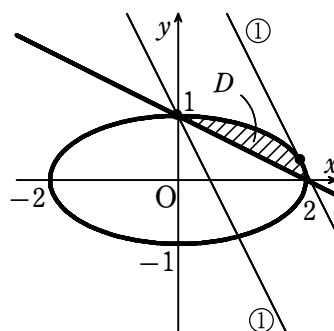
$k = \sqrt{17}$ のとき、直線①は楕円②に第1象限の点で接する

このときの接点の座標を (x_1, y_1) とすると

$$x_1 = \frac{8}{17}k = \frac{8}{17} \cdot \sqrt{17} = \frac{8\sqrt{17}}{17}, \quad y_1 = -2 \cdot \frac{8\sqrt{17}}{17} + \sqrt{17} = \frac{\sqrt{17}}{17}$$

よって、 k は $x = \frac{8\sqrt{17}}{17}$, $y = \frac{\sqrt{17}}{17}$ のとき最大

$$\text{最大値 } \sqrt{17}$$



例4

直線 $y = 2x + k$ が曲線 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ ($x > 0$) と異なる2点 A, A' で交わる
とき、 k の値の範囲を求めよ。また、線分 AA' の中点 $P(x, y)$ の軌跡の
方程式を求めよ。

解説

$$y = 2x + k \cdots \textcircled{1}, \quad \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1 \cdots \textcircled{2} \text{ とおく}$$

①, ②より

$$9x^2 - 4(2x + k)^2 = 36$$

$$7x^2 + 16kx + 4k^2 + 36 = 0 \cdots \textcircled{3}$$

$$f(x) = 7x^2 + 16kx + 4k^2 + 36 \text{ とおく}$$

①と②が x 座標が正の異なる 2 点で交わる時、

$$f(x)=0 \text{ の判別式 } D>0,$$

$$y=f(x) \text{ の軸について (軸)}>0,$$

$$f(0)>0$$

$$\frac{D}{4}>0 \text{ より, } \frac{D}{4}=64k^2-7(4k^2+36)=36(k^2-7)>0$$

$$\therefore k<-\sqrt{7}, \sqrt{7}<k$$

$$\text{(軸)}>0 \text{ より, } -\frac{8}{7}k>0 \quad \therefore k<0$$

$$f(0)=4k^2+36>0 \text{ は常に成り立つ}$$

$$\text{よって, } k<-\sqrt{7}$$

$$\text{③の解を } \alpha, \beta \text{ とおくと, 解と係数の関係より, } \alpha+\beta=-\frac{16}{7}k$$

線分 AA' の中点が $P(x, y)$ であるから

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}=-\frac{8}{7}k$$

これを①に代入すると

$$y=-\frac{9}{7}k$$

$$k \text{ を消去すると, } y=\frac{9}{8}x$$

$$\text{ただし, } k<-\sqrt{7} \text{ より, } x>\frac{8\sqrt{7}}{7}$$

例5

双曲線 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ を H とし、 H の $x>0$ の部分を H_1 、 H の $x<0$ の部分を H_2 とする。また、 ℓ を点 $P(2, 0)$ を通る傾き m の直線とする。

- (1) 直線 ℓ が H と共有点を 2 個もつような m の範囲を求めよ。
- (2) 直線 ℓ が H_1 と H_2 の両方と共有点をもつような m の範囲を求めよ。
- (3) 直線 ℓ と H_1 の共有点を P_1 とし、 ℓ と H_2 の共有点を P_2 とする。このとき、線分 P_1P_2 の中点 M は、ある 2 次曲線 C の上を動く。 C の方程式を求めよ。
- (4) (3) で求めた 2 次曲線 C の焦点の座標を求めよ。

解説

(1) 直線 ℓ の方程式は, $y=m(x-2)$

これを $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ に代入して,

$$(4-9m^2)x^2+36m^2x-36(m^2+1)=0 \dots \textcircled{1}$$

①が異なる 2 つの実数解を条件をもてばよい

$$4-9m^2 \neq 0 \text{ より, } m \neq \pm \frac{2}{3} \dots \textcircled{2}$$

①の判別式を D として, $D>0$ より

$$\frac{D}{4}=18^2m^4+36(4-9m^2)(m^2+1)>0$$

$$4-5m^2>0 \quad \therefore -\frac{2}{\sqrt{5}}<m<\frac{2}{\sqrt{5}} \dots \textcircled{3}$$

②, ③より

$$-\frac{2}{\sqrt{5}}<m<-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}<m<\frac{2}{3}, \frac{2}{3}<m<\frac{2}{\sqrt{5}} \dots \textcircled{4}$$

(2) ①が $x<0$, $0<x$ にそれぞれ解をもてばよいから,

①の 2 つの解の積が負となればよい

$$-\frac{36(m^2+1)}{4-9m^2}<0$$

$m^2+1>0$ より

$$4-9m^2>0 \quad \therefore -\frac{2}{3}<m<\frac{2}{3}$$

$$\textcircled{4} \text{ より, } -\frac{2}{3}<m<\frac{2}{3}$$

(3) $P_1(\alpha, m(\alpha-2))$, $P_2(\beta, m(\beta-2))$ ($\beta<0<\alpha$) とおくと,

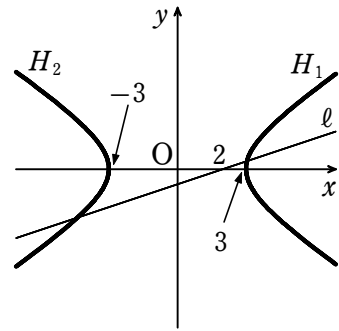
$$\alpha, \beta \text{ は } \textcircled{1} \text{ の解より, } \alpha+\beta=\frac{36m^2}{9m^2-4}$$

$M(X, Y)$ とおくと

$$X=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{18m^2}{9m^2-4}=2+\frac{8}{9m^2-4} \dots \textcircled{5}$$

$$Y=m(X-2) \dots \textcircled{6}$$

$$X \leq 0 \text{ より, } m=\frac{Y}{X-2}$$



⑤より

$$X=2+\frac{8}{9\left(\frac{Y}{X-2}\right)^2-4}$$

$$X-2=\frac{8(X-2)^2}{9Y^2-4(X-2)^2}$$

$$9Y^2-4(X-2)^2=8(X-2)$$

$$(X-1)^2-\frac{9}{4}Y^2=1$$

よって、求める C の方程式は

$$(x-1)^2-\frac{9}{4}y^2=1 \quad (x \leq 0)$$

(4) $(x-1)^2-\frac{9}{4}y^2=1$ は $(1, 0)$ を中心とする双曲線であるから、

求める焦点の座標は

$$\left(1+\sqrt{1+\frac{4}{9}}, 0\right), \left(1-\sqrt{1+\frac{4}{9}}, 0\right)$$

$$\therefore \left(1+\frac{\sqrt{13}}{3}, 0\right), \left(1-\frac{\sqrt{13}}{3}, 0\right)$$

例6

xy 平面において、点 $(0, 5)$ を中心とする円が双曲線 $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$ と相異なる 2 点だけを共有している。このとき、この円の半径は $\sqrt{\quad}$ ，方程式は $x^2+\frac{y^2}{\quad}=r^2$ である。

(解説)

点 $(0, 5)$ を中心とし、半径 r の円の方程式は

$$x^2+(y-5)^2=r^2 \dots \textcircled{1}$$

とおける

双曲線の方程式 $\frac{x^2}{4^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$ を変形すると

$$x^2=4^2\left(1+\frac{y^2}{3^2}\right) \dots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$4^2\left(1 + \frac{y^2}{3^2}\right) + (y-5)^2 = r^2$$

$$\frac{25}{9}y^2 - 10y + 41 - r^2 = 0 \dots \textcircled{3}$$

円, 双曲線とも y 軸に関して対称であるから,

③が重解をもてば, 双曲線と円①は2点のみを共有する

③の判別式 D として, $D=0$ より

$$\frac{D}{4} = 25 - \frac{25}{9}(41 - r^2) = 0 \quad r^2 = 32$$

ゆえに, この円の半径は $\sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

方程式は $x^2 + (y-5)^2 = 32$

別解

$\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ 上の点 (x_1, y_1) ($x_1, y_1 > 0$) における法線は

$$\frac{y_1 x}{9} + \frac{x_1 y}{16} = \frac{25x_1 y_1}{144}$$

これが, $(0, 5)$ を通るとき

$$\frac{5x_1}{16} = \frac{25x_1 y_1}{144} \quad \therefore y_1 = \frac{9}{5} \quad \therefore x_1 = \frac{4\sqrt{34}}{5}$$

よって, 円の半径 r は

$$r = \sqrt{\left(\frac{4\sqrt{34}}{5}\right)^2 + \left(\frac{16}{5}\right)^2} = 4\sqrt{2}$$

方程式は $x^2 + (y-5)^2 = 32$

(2) 放物線の接線の方程式

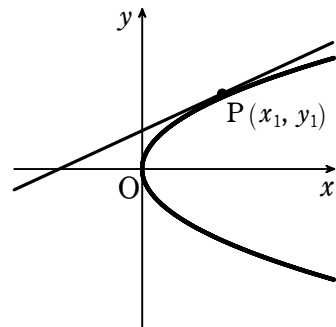
放物線 $y^2 = 4px \dots \textcircled{1}$ 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線の方程式について考える。

①の両辺を x で微分すると,

$$2y \cdot \frac{dy}{dx} = 4p$$

$y_1 = 0$ のとき, $\frac{dy}{dx}$ は存在しない

このとき, すなわち $P(0, 0)$ のとき, 接線は $x=0$



$y_1 \neq 0$ のとき, $\frac{dy}{dx} = \frac{2p}{y_1}$ より

$$y - y_1 = \frac{2p}{y_1}(x - x_1)$$

$$y_1 y - y_1^2 = 2p(x - x_1)$$

$P(x_1, y_1)$ は①上の点であるから, $y_1^2 = 4px_1$ より

$$y_1 y = 2p(x + x_1)$$

これは, $P(0, 0)$ のときも成り立つ

放物線の接線の方程式

放物線 $y^2 = 4px$ 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線の方程式は

$$y_1 y = 2p(x + x_1)$$

放物線 $x^2 = 4py \cdots$ ①上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線の方程式は x と y を入れ替えて

$$x_1 x = 2p(y + y_1)$$

となる。

例7

放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ 上の頂点以外の点を $P(x_0, y_0)$ とし, P における接線を l とする. また, 放物線の焦点を F とする.

- (1) F の座標と準線の方程式を求めよ.
- (2) P における接線の方程式を求めよ.

解説

$$(1) y = \frac{1}{2}x^2 \text{ より, } x^2 = 4 \cdot \frac{1}{2}y$$

よって, 焦点 F の座標は $(0, \frac{1}{2})$, 準線の方程式は $y = -\frac{1}{2}$

(2) $y' = x$ であるから, 点 $P(x_0, y_0)$ における接線の方程式は

$$y - y_0 = x_0(x - x_0)$$

$$\therefore y = x_0 x - \frac{1}{2}x_0^2$$

別解

点 $P(x_0, y_0)$ における接線の方程式は

$$x_0x = 2 \cdot \frac{1}{2}(y + y_0)$$

$$\therefore y = x_0x - \frac{1}{2}x_0^2$$

例8

(1) p を正の定数とし、点 $F(0, p)$ を焦点にもち、 $y = -p$ を準線とする放物線を C とする。 C 上の点 $Q(x_0, y_0)$ (ただし $x_0 \neq 0$) を考え、点 Q と F を通る直線を l_1 、点 Q を通り放物線 C の主軸に平行な直線を l_2 とする。このとき、点 Q における C の接線 l は、 l_1 と l_2 のなす角を 2 等分することを示せ。

(2) 放物線 $y = x^2 - 2\sqrt{2}x + 4$ 上の点 $R(a, b)$ ($a > \sqrt{2}$) における接線と直線 $x = a$ のなす角を θ ($0^\circ < \theta < 90^\circ$) とする。点 R を通り傾きが

$\frac{1 - \tan^2 \theta}{2 \tan \theta}$ である直線は a によらない定点を通ることを示し、その定点の座標を求めよ。

解説

(1) C の方程式は

$$x^2 = 4py \quad \therefore y = \frac{1}{4p}x^2$$

$y' = \frac{x}{2p}$ より、 l の方程式は

$$y - y_0 = \frac{x_0}{2p}(x - x_0)$$

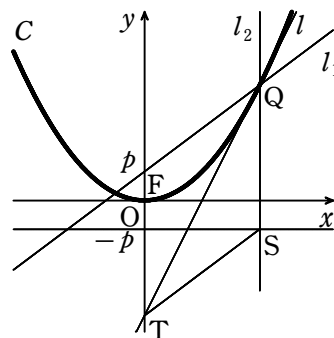
ここで、 $y_0 = \frac{x_0^2}{4p}$ より、 $y = \frac{x_0}{2p}x - \frac{x_0^2}{4p}$

l_2 と直線 $y = -p$ との交点を S 、 l と y 軸との交点を T とすると

T の座標は $\left(0, -\frac{x_0^2}{4p}\right)$ より、 $TF = p + \frac{x_0^2}{4p}$

また、 $SQ = p + \frac{x_0^2}{4p}$ より、 $TF = SQ$

よって、四角形 $FTSQ$ の 1 組の対辺が等しく平行となるから、この四角形は平行四辺形である



また、点 Q と焦点 F との距離 FQ と、準線との距離 SQ とは等しいから、四角形 FTSQ はひし形である
したがって、このひし形の対角線と重なる接線 l は、 l_1 と l_2 とのなす角を 2 等分する

別解

$$C \text{ の方程式は } y = \frac{1}{4p}x^2, y' = \frac{x}{2p}$$

C は y 軸に関して対称であるから、 $x_0 > 0$ で考えて、

l と l_1, l_2 とのなす角をそれぞれ α, β (α, β は鋭角)、

l, l_1 が x 軸の正の向きとのなす角をそれぞれ θ_1, θ_2 とすると

$$\alpha = \theta_1 - \theta_2, \beta = 90^\circ - \theta_1$$

l の傾きは $\frac{x_0}{2p}$, l_1 の傾きは $\frac{y_0 - p}{x_0}$ より

$$\tan \theta_1 = \frac{x_0}{2p}, \tan \theta_2 = \frac{y_0 - p}{x_0}$$

$$\tan \alpha = \tan(\theta_1 - \theta_2) = \frac{\tan \theta_1 - \tan \theta_2}{1 + \tan \theta_1 \tan \theta_2} = \frac{\frac{x_0}{2p} - \frac{y_0 - p}{x_0}}{1 + \frac{x_0}{2p} \cdot \frac{y_0 - p}{x_0}} = \frac{\frac{x_0^2 - 2p(y_0 - p)}{x_0}}{\frac{x_0(y_0 + p)}{x_0}}$$

ここで、 $y_0 = \frac{x_0^2}{4p}$ であるから、 $\tan \alpha = \frac{2p(x_0^2 + 4p^2)}{x_0(x_0^2 + 4p^2)} = \frac{2p}{x_0}$ より

$$\tan \beta = \tan(90^\circ - \theta_1) = \frac{1}{\tan \theta_1} = \frac{2p}{x_0}$$

よって、 $\tan \alpha = \tan \beta$

α, β は鋭角であるから、 $\alpha = \beta$ である

$$(2) y = x^2 - 2\sqrt{2}x + 4 = (x - \sqrt{2})^2 + 2 = \frac{1}{4} \times 4(x - \sqrt{2})^2 + 2 \text{ より}$$

$y = \frac{1}{4} \times 4x^2$ を x 軸方向に $\sqrt{2}$, y 軸方向に 2 平行移動したものであり、

点 R における接線は、(1) の l を同じく平行移動したものである

$$\frac{1 - \tan^2 \theta}{2 \tan \theta} = \frac{1}{\tan 2\theta} = \tan(90^\circ - 2\theta) \text{ より}$$

点 R を通り傾き $\frac{1 - \tan^2 \theta}{2 \tan \theta}$ の直線 L は、直線 $x = a$ と 2θ の角をなす

直線、すなわち、(1) の l_1 を同じく平行移動したものになる

l_1 は、(1)において x_0 によらず焦点を通り、

$y = \frac{1}{4} \times 4x^2$ の焦点は $F\left(0, \frac{1}{4}\right)$ であるから、

直線 L はこの焦点 F を平行移動した定点 $\left(\sqrt{2}, \frac{9}{4}\right)$ を通る

よって、求める定点は、 $\left(\sqrt{2}, \frac{9}{4}\right)$ である。

別解

$$y = x^2 - 2\sqrt{2}x + 4 \text{ より } y' = 2x - 2\sqrt{2}$$

R における接線の傾きは $2a - 2\sqrt{2}$

この接線と x 軸の正の向きとのなす角を θ' とすると、

$a > \sqrt{2}$ であるから、 $\theta = 90^\circ - \theta'$ より

$$\tan \theta = \tan(90^\circ - \theta') = \frac{1}{\tan \theta'} = \frac{1}{2a - 2\sqrt{2}}$$

題意を満たす直線 L の方程式は

$$y - b = \frac{1 - \tan^2 \theta}{2 \tan \theta} (x - a)$$

$$b = a^2 - 2\sqrt{2}a + 4 = (a - \sqrt{2})^2 + 2, \tan \theta = \frac{1}{2a - 2\sqrt{2}} \text{ より}$$

$c = a - \sqrt{2}$ とおいて

$$y - (c^2 + 2) = \frac{1 - \left(\frac{1}{2c}\right)^2}{2 \times \frac{1}{2c}} (x - c - \sqrt{2})$$

$$(4x - 4\sqrt{2})c^2 + (9 - 4y)c - x + \sqrt{2} = 0$$

これが、任意の c で成り立つとき

$$x = \sqrt{2}, y = \frac{9}{4}$$

よって、 a によらず直線 L は定点 $\left(\sqrt{2}, \frac{9}{4}\right)$ を通る

したがって、求める定点は $\left(\sqrt{2}, \frac{9}{4}\right)$

(3) 楕円の接線の方程式

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \cdots \textcircled{1}$ 上の点 $P(x_1, y_1)$ に

おける接線の方程式について考える。

①の両辺を x で微分して

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$y_1 = 0$ のとき, $x_1 = \pm a$ より, $\frac{dy}{dx}$ は存在しない

このとき, すなわち $P(\pm a, 0)$ のとき, 接線は $x = \pm a$

$y_1 \neq 0$ のとき, $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$ より

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1)$$

$$a^2 y_1 y - a^2 y_1^2 = -b^2 x_1 x + b^2 x_1^2$$

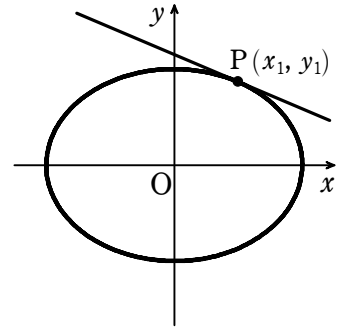
$$b^2 x_1 x + a^2 y_1 y = b^2 x_1^2 + a^2 y_1^2$$

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$$

(x_1, y_1) は①上の点であるから, $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ より

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

これは, $P(\pm a, 0)$ のときも成り立つ



楕円の接線の方程式

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線の方程式は

$$\frac{x_1 x}{a^2} + \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

例9

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 $\left(-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$ における接線 l と x 軸と y 軸で囲まれた三角形の面積は である。ただし、 a と b は正の定数である。

解説

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 $\left(-\frac{a}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}b\right)$ における接線の方程式は

$$\frac{-\frac{a}{2}x}{a^2} + \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}by}{b^2} = 1$$

$$-\frac{x}{2a} + \frac{\sqrt{3}y}{2b} = 1$$

$$x=0 \text{ のとき, } y = \frac{2}{\sqrt{3}}b = \frac{2\sqrt{3}}{3}b$$

$$y=0 \text{ のとき, } x = -2a$$

$a > 0, b > 0$ より、求める三角形の面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{2\sqrt{3}}{3}b = \frac{2\sqrt{3}}{3}ab$$

例10

xy 平面上にある楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) 上の点 $P(x_0, y_0)$ における法線の方程式を求めよ。ただし、 $x_0 \neq 0, y_0 \neq 0$ とする。

解説

楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 $P(x_0, y_0)$ における接線の方程式は

$$\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$$

これに直交する直線は

$$\frac{y_0x}{b^2} - \frac{x_0y}{a^2} + c = 0$$

とおけて、これが点 $P(x_0, y_0)$ を通るとき

$$\frac{x_0 y_0}{b^2} - \frac{x_0 y_0}{a^2} + c = 0 \quad \therefore c = \frac{x_0 y_0}{a^2} - \frac{x_0 y_0}{b^2}$$

よって、求める法線の方程式は

$$\frac{y_0(x - x_0)}{b^2} - \frac{x_0(y - y_0)}{a^2} = 0$$

例11

点 $(2 + \sqrt{5}, -2)$ から楕円 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ に引いた接線の傾きは $^{\text{ア}}$

または $^{\text{イ}}$ である。

解説

楕円 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 上の点 (s, t) における接線の方程式は

$$sx + \frac{ty}{4} = 1$$

これが点 $(2 + \sqrt{5}, -2)$ を通るとき

$$(2 + \sqrt{5})s - \frac{2}{4}t = 1$$

$$t = 2(2 + \sqrt{5})s - 2$$

また $s^2 + \frac{t^2}{4} = 1$ より

$$s^2 + \frac{1}{4}\{2(2 + \sqrt{5})s - 2\}^2 = 1$$

$$(5 + 2\sqrt{5})s^2 - (2 + \sqrt{5})s = 0$$

$$\sqrt{5}(\sqrt{5} + 2)s^2 - (2 + \sqrt{5})s = 0$$

$$s(\sqrt{5}s - 1) = 0 \quad \therefore s = 0, \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$s = 0$ のとき, $t = -2$

よって、接線の方程式は $y = -2$

$$s = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ のとき, } t = 2(2 + \sqrt{5}) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} - 2 = \frac{4}{\sqrt{5}}$$

よって、接線の方程式は $\frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{y}{\sqrt{5}} = 1 \quad \therefore y = -x + \sqrt{5}$

したがって、求める接線の傾きは $^{\text{ア}}0$, $^{\text{イ}}-1$ (または $^{\text{ア}}-1$, $^{\text{イ}}0$)

別解

求める接線は、 x 軸に平行ではないので、

$$y+2=m\{x-(2+\sqrt{5})\}$$

とおける

これが、 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ に接するとき

$$4x^2+\{m(x-\alpha)-2\}^2=4 \quad (\alpha=2+\sqrt{5})$$

$$4x^2+m^2(x-\alpha)^2-4m(x-\alpha)+4=4$$

$$(m^2+4)x^2-2m(\alpha m+2)x+\alpha m(\alpha m+4)=0$$

が重解をもてばよいから、判別式を D として、 $D=0$ より

$$\frac{D}{4}=m^2(\alpha m+2)^2-\alpha m(m^2+4)(\alpha m+4)=0$$

$$m\{m(\alpha m+2)^2-\alpha(m^2+4)(\alpha m+4)\}=0$$

$$m\{(1-\alpha^2)m-4\alpha\}=0$$

$$\therefore m=0, \frac{4\alpha}{1-\alpha^2}$$

$\alpha=2+\sqrt{5}$ であるから、 $\alpha^2-4\alpha-1=0$ ，すなわち $4\alpha=\alpha^2-1$ より

$$m=0, -1$$

例12

(1) 平面上の2点 $F_1(-1, 0)$ 、 $F_2(1, 0)$ からの距離の和が $2a$ ($a>1$) である楕円 C の方程式を求めよ。

(2) 楕円 C が直線 $x+y=2$ と接するとき、 a の値と接点 P の座標を求めよ。

(3) 点 P における楕円 C の法線が x 軸と交わる点を Q とするとき

$$\frac{PF_1}{PF_2} = \frac{QF_1}{QF_2}$$

であることを示せ。

解説

(1) 条件より，長軸は $2a$

短軸を $2b$ とすると， $b = \sqrt{a^2 - 1}$

よって，楕円の方程式は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - 1} = 1$$

(2) $y = -x + 2$ を楕円の方程式に代入して

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(-x+2)^2}{a^2 - 1} = 1$$

$$(2a^2 - 1)x^2 - 4a^2x + 5a^2 - a^4 = 0$$

判別式を D とすると， $D = 0$ より

$$D/4 = 4a^4 - (2a^2 - 1)(5a^2 - a^4) = 0$$

$$a^2(a^2 - 1)(2a^2 - 5) = 0$$

$$a > 1 \text{ より， } a = \frac{\sqrt{10}}{2}$$

接点の x 座標は， $x = -\frac{-4a^2}{2(2a^2 - 1)} = \frac{2a^2}{2a^2 - 1}$ より， $P\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right)$

(3) 点 P における楕円の法線の方程式は

$$y - \frac{3}{4} = x - \frac{5}{4} \quad \therefore y = x - \frac{1}{2}$$

よって， $Q\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

$$PF_1^2 = \left(-\frac{9}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{90}{16} \quad \therefore PF_1 = \frac{3\sqrt{10}}{4}$$

$$PF_2^2 = \left(-\frac{1}{4}\right)^2 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{10}{16} \quad \therefore PF_2 = \frac{\sqrt{10}}{4}$$

$$QF_1 = \frac{3}{2}, \quad QF_2 = \frac{1}{2}$$

以上より

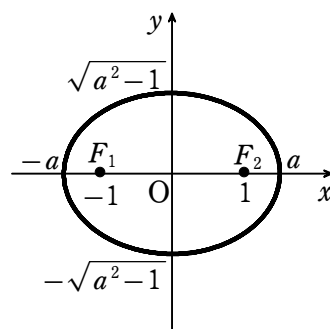
$$\frac{PF_1}{PF_2} = \frac{3\sqrt{10}/4}{\sqrt{10}/4} = 3 \quad \frac{QF_1}{QF_2} = \frac{3/2}{1/2} = 3$$

$$\text{よって， } \frac{PF_1}{PF_2} = \frac{QF_1}{QF_2}$$

参考

楕円の性質から， $\angle F_1PQ = \angle F_2PQ$

$\triangle PF_1F_2$ において， PQ は $\angle F_1PF_2$ の 2 等分線より



$$PF_1 : PF_2 = QF_1 : QF_2$$

$$\therefore \frac{PF_1}{PF_2} = \frac{QF_1}{QF_2}$$

(4) 双曲線の接線の方程式

楕円 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \dots \textcircled{1}$ 上の点 $P(x_1, y_1)$ に

おける接線の方程式について考える。

①の両辺を x で微分して

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0$$

$y_1 = 0$ のとき, $x_1 = 0$ より, $\frac{dy}{dx}$ は存在しない

このとき, すなわち $P(\pm a, 0)$ のとき, 接線は $x = \pm a$

$y_1 \neq 0$ のとき, $\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y}$ より

$$y - y_1 = \frac{b^2 x_1}{a^2 y_1} (x - x_1)$$

$$a^2 y_1 y - a^2 y_1^2 = b^2 x_1 x - b^2 x_1^2$$

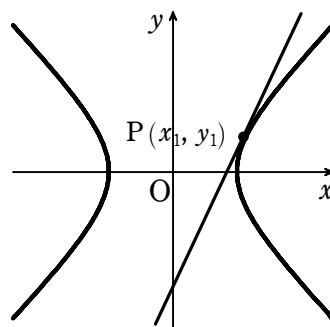
$$b^2 x_1 x - a^2 y_1 y = b^2 x_1^2 - a^2 y_1^2$$

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}$$

(x_1, y_1) は①上の点であるから, $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ より

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

これは, $P(\pm a, 0)$ のときも成り立つ



双曲線の接線の方程式

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線の方程式は

$$\frac{x_1 x}{a^2} - \frac{y_1 y}{b^2} = 1$$

例13

楕円 $\frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{12^2} = 1$ と双曲線 $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ がある．第1象限におけるこれら2曲線の交点をPとする．

- (1) 点Pにおいてこの楕円に引いた接線の方程式を求めよ．
- (2) 点Pにおいてこれら2曲線に引いた接線が，直交することを示せ．

解説

$$(1) \frac{x^2}{13^2} + \frac{y^2}{4^2 \times 3^2} = 1, \frac{y^2}{3^2} = \frac{x^2}{4^2} - 1 \text{ から } y \text{ を消去して}$$

$$\frac{x^2}{13^2} + \frac{1}{4^2} \left(\frac{x^2}{4^2} - 1 \right) = 1$$

$$\left(\frac{1}{13^2} + \frac{1}{16^2} \right) x^2 = \frac{17}{16}$$

Pは第1象限にあるから， $x > 0$ より， $x = \frac{52}{5}$

$$\text{このとき， } y^2 = 3^2 \left(\frac{1}{4^2} \times \frac{52^2}{5^2} - 1 \right) = \frac{3^2 \times 12^2}{5^2}$$

$$y > 0 \text{ より， } y = \frac{36}{5} \quad \therefore P \left(\frac{52}{5}, \frac{36}{5} \right)$$

よって，求める接線の方程式は

$$\frac{52}{5} \cdot \frac{x}{13^2} + \frac{36}{5} \cdot \frac{y}{12^2} = 1$$

$$\therefore 16x + 13y = 260$$

(2) 点Pにおける $\frac{x^2}{4^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ の接線の方程式は

$$\frac{52}{5} \cdot \frac{x}{4^2} - \frac{36}{5} \cdot \frac{y}{3^2} = 1 \quad \therefore 13x - 16y = 20$$

$16 \times 13 + 13 \times (-16) = 0$ より，2接線は直交する

例14

双曲線 $C: \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ 上に点 $A\left(\frac{4}{\cos\theta}, 3\tan\theta\right)$, $B(4, 0)$ をとる。

ただし, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。A における C の接線と B における C の接線との交点を D とし, C の焦点のうち x 座標が正であるものを F とおく。

(1) D の座標を求めよ。

(2) $\tan \frac{\theta}{2} = m$ とおく。 $\tan \angle DFB$ を m を用いて表せ。

(3) 直線 DF は $\angle AFB$ を 2 等分することを証明せよ。

解説

(1) 点 A における C の接線の方程式は

$$\frac{1}{16} \cdot \frac{4}{\cos\theta} x - \frac{1}{9} \cdot (3\tan\theta) y = 1$$

$$\frac{1}{4\cos\theta} x - \frac{\tan\theta}{3} y = 1 \dots \textcircled{1}$$

点 B における接線の方程式は $x=4$ であるから,

① に $x=4$ を代入して整理すると

$$y = \frac{3}{\tan\theta} \left(\frac{1}{\cos\theta} - 1 \right) = \frac{3(1 - \cos\theta)}{\sin\theta}$$

よって, $D\left(4, \frac{3(1 - \cos\theta)}{\sin\theta}\right)$

(2) $\frac{\theta}{2} = \alpha$ とおく。

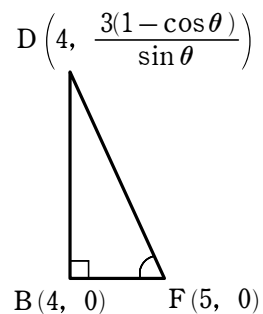
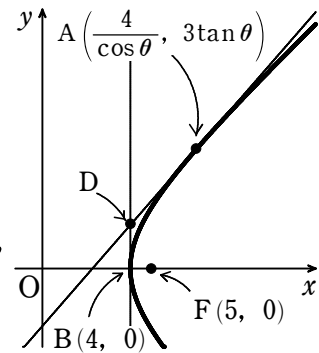
F の座標は, $(5, 0)$

よって

$$\tan \angle DFB = \frac{BD}{BF} = \frac{\frac{3(1 - \cos\theta)}{\sin\theta}}{5 - 4}$$

$$= \frac{3(1 - \cos\theta)}{\sin\theta} = \frac{3 \cdot 2\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

$$= \frac{3\sin\alpha}{\cos\alpha} = 3\tan\alpha = 3m$$



(3)(i) $\frac{4}{\cos \theta} = 5$ すなわち $\cos \theta = \frac{4}{5}$ のとき

$\angle AFB = \frac{\pi}{2}$ より, D の座標 (4, 1)

$\triangle DBF$ は $DB = BF$ の直角二等辺三角形より

$$\angle DFB = \frac{\pi}{4} \quad \therefore \angle AFB = 2\angle DFB$$

(ii) $\frac{4}{\cos \theta} \neq 5$ のとき

AF と x 軸の正の向きとのなす角は, $\pi - \angle AFB$

直線 AF の傾きは, $\tan(\pi - \angle AFB) = \frac{3\tan \theta - 0}{\frac{4}{\cos \theta} - 5}$ より

$$-\tan \angle AFB = \frac{3\sin \theta}{4 - 5\cos \theta}$$

$$\therefore \tan \angle AFB = \frac{3\sin \theta}{5\cos \theta - 4} = \frac{3 \cdot 2\sin \alpha \cos \alpha}{5(1 - 2\sin^2 \alpha) - 4} = \frac{6\sin \alpha \cos \alpha}{1 - 10\sin^2 \alpha}$$

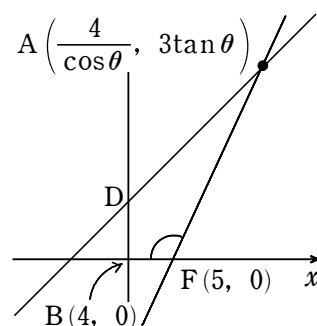
$$= \frac{6 \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 10 \left(\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right)^2} = \frac{6\tan \alpha}{(1 + \tan^2 \alpha) - 10\tan^2 \alpha} = \frac{6\tan \alpha}{1 - 9\tan^2 \alpha} = \frac{6m}{1 - 9m^2}$$

$$\tan 2\angle DFB = \frac{2\tan \angle DFB}{1 - \tan^2 \angle DFB} = \frac{2 \cdot 3m}{1 - (3m)^2} = \frac{6m}{1 - 9m^2} \text{ より,}$$

$$\tan \angle AFB = \tan 2\angle DFB$$

$0 < \angle AFB < \pi$, $0 < 2\angle DFB < \pi$ より, $\angle AFB = 2\angle DFB$

(i), (ii)より, 直線 DF は $\angle AFB$ を 2 等分する



補1

双曲線 $C: 9x^2 - y^2 = 9$ について,

- (1) この双曲線の焦点の座標と漸近線の方程式を求めよ.
- (2) 直線 $l: y = mx + n$ と双曲線 C が異なる 2 つの共通点をもつための条件を m, n の式で表せ.
- (3) 直線 l と双曲線 C の共通点を P, Q , 直線 l と双曲線 C の 2 本の漸近線との共通点を R, S とするとき, $PR = QS$ が成立することを証明せよ.

解説

(1) $C: 9x^2 - y^2 = 9$ から, $\frac{x^2}{1^2} - \frac{y^2}{3^2} = 1$ より,

焦点は $(\pm\sqrt{10}, 0)$, 漸近線の方程式は $y = \pm 3x$

(2) C と l の方程式から y を消去して

$$(9 - m^2)x^2 - 2mnx - (9 + n^2) = 0 \dots \textcircled{1}$$

これが, 2 次方程式となり, 異なる 2 実解をもてばよいから,
判別式を D として,

$$m \neq \pm 3, \quad \frac{D}{4} = m^2 n^2 + (9 - m^2)(9 + n^2) = 9(n^2 - m^2 + 9) > 0$$

よって, $m^2 - n^2 < 9, \quad m \neq \pm 3$

(3) ①の異なる 2 つの実数解を α, β とすると,

2 点 P, Q の x 座標が α, β であるから, 線分 PQ の中点 M の x 座標は

$$\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{mn}{9 - m^2}$$

また, (1)で求めた 2 つの漸近線と l との交点 R, S の x 座標は

$$mx + n = \pm 3x \quad \therefore x = \frac{-n}{m \mp 3} \quad (\text{複号同順})$$

よって, 線分 RS の中点 N の x 座標は

$$\frac{1}{2} \left(\frac{-n}{m-3} + \frac{-n}{m+3} \right) = \frac{mn}{9 - m^2}$$

したがって, 直線 l 上の 2 点 M, N は一致する
すなわち, $PR = QS$ が成り立つ

補2

双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ がある。ただし、 $a > 0, b > 0$ とする。

(1) 2つの漸近線のなす角を θ とするとき、 $\sin \theta$ を求めよ。

(2) 双曲線上の点 $P(p, q)$ ($p > 0, q > 0$) を通り、2つの漸近線に平行な直線を引き、それぞれが漸近線と交わる点を Q, R とする。このとき、平行四辺形 $OQPR$ (O は原点) の面積を求めよ。

(解説)

(1) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ の漸近線は、 $y = \pm \frac{b}{a}x$

$y = \frac{b}{a}x$ と x 軸の正の向きとのなす角は $\frac{\theta}{2}$ ($0^\circ < \frac{\theta}{2} < 90^\circ$) より

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{b}{a} \quad \sin \frac{\theta}{2} = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \frac{\theta}{2} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

よって

$$\sin \theta = \sin 2 \cdot \frac{\theta}{2} = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$

(2) 平行四辺形 $OQPR$ の面積 S は

$$S = OQ \cdot OR \sin \theta$$

Q を $y = \frac{b}{a}x$ 上の点、 R を $y = -\frac{b}{a}x$ 上の点とする

P から $y = \frac{b}{a}x$ ($bx - ay = 0$) に下した垂線の足を H_1 とし、

$y = -\frac{b}{a}x$ ($bx + ay = 0$) に下した垂線の足を H_2 とすると

$$\begin{aligned} OQ = PR &= \frac{PH_2}{\sin \theta} = \frac{|bp + aq|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{a^2 + b^2}{2ab} \\ &= \frac{bp + aq}{2ab} \sqrt{a^2 + b^2} \quad (bp + aq > 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} OR = PQ &= \frac{PH_1}{\sin \theta} = \frac{|bp - aq|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{a^2 + b^2}{2ab} \\ &= \frac{bp - aq}{2ab} \sqrt{a^2 + b^2} \quad (bp - aq > 0) \end{aligned}$$

よって

$$S = \frac{(bp + aq)(bp - aq)(a^2 + b^2)}{4a^2b^2} \cdot \frac{2ab}{a^2 + b^2}$$
$$= \frac{b^2p^2 - a^2q^2}{2ab}$$

ここで、 $\frac{p^2}{a^2} - \frac{q^2}{b^2} = 1$ であるから、 $b^2p^2 - a^2q^2 = a^2b^2$ より

$$S = \frac{ab}{2}$$

別解

Q, R の座標を求めて $S = |x_1y_2 - x_2y_1|$ を利用して求めてもよいが、面倒である。