1 [東京学芸大]

(1) a を定数とするとき，区間 $0 \leqq x \leqq 1$ における関数
$f(x)=(-8a+4)x+(3a^2+2a+1)$
の最小値を a を用いて表せ．
(2) a がいろいろな実数値をとるとき，(1) で求めた値の最小値を求めよ．

2 [2016 センター]

a を実数とする。x の関数 $f(x)=(1+2a)(1-x)+(2-a)x$ を考える。
$f(x)=\left(-\boxed{\text{ア}}a+\boxed{\text{イ}}\right)x+2a+1$ である。
(1) $0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最小値は，

$a \leqq \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ア}}}$ のとき，$\boxed{\text{ウ}}a+\boxed{\text{エ}}$ であり，

$a > \dfrac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ア}}}$ のとき，$\boxed{\text{オ}}a+\boxed{\text{カ}}$ である。

(2) $0 \leqq x \leqq 1$ において，常に $f(x) \geqq \dfrac{2(a+2)}{3}$ となる a の値の範囲は，

$\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \leqq a \leqq \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である。

(3) $0 \leqq x \leqq 1$ における $f(x)$ の最小値を $g(a)$ とおき，a の関数と考える。

a が $\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}} \leqq a \leqq \dfrac{\boxed{\text{ケ}}}{\boxed{\text{コ}}}$ の範囲にあるとき，$g(a)$ の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$ であり，

$g(a)$ の最大値は $\dfrac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。

3

(1) $x,\ y$ が $1 \leqq x \leqq 3,\ 0 \leqq y \leqq 1$ で変化するときの $xy+x-2y+3$ の最大値と最小値を求めよ.
(2) 関数 $f(x,\ y)=3y^2-4xy+3x-2y+1$ の $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$ における最小値を求めよ．

4

実数 $x,\ y$ が $0 \leqq x \leqq 1,\ 1 \leqq y \leqq 2$ を満たすとき， $f(x,\ y)=x^2y+2x+xy+3y-1$ の最小値を求めよ.

$\boxed{5}$ [東京大]

xy 平面内の領域 $-1 \leqq x \leqq 1,\ -1 \leqq y \leqq 1$ において，$1-ax-by-axy$ の最小値が正となるような定数 a, b を座標とする点 (a, b) の範囲を図示せよ．

$\boxed{6}$ [Ⅰ．1998 北星学園大　Ⅱ．長崎総合科学大]

Ⅰ．(1)　x, y の関数 $f(x, y)=x^2-4xy+5y^2+2y+2$ の最小値を求めよ．また，このときの x, y の値を求めよ．

(2)　x, y の範囲を $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ に制限したときの $f(x, y)$ の最小値を求めよ．また，このときの x, y の値を求めよ．

Ⅱ．$P=2x^2+2xy+5y^2-6x-6y+5$ とする．

(1) x, y がすべての実数値をとり得るとき，P の最小値を求めよ．

(2) $-1 \leqq x \leqq 1,\ 1 \leqq y \leqq 3$ の範囲で，P の最大値と最小値を求めよ．

$\boxed{7}$ [Ⅰ．産業医科大　Ⅱ．順天堂大　Ⅲ．名古屋市立大]

Ⅰ．x, y の関数 $f(x, y)=3x^2-6xy+7y^2+12x-14y+12$ がある．$x \geqq 0,\ y \geqq 0$ のとき，$f(x, y)$ の最小値を求めよ．

Ⅱ．連立不等式 $-2 \leqq x \leqq 2,\ -2 \leqq y \leqq 2$ の表す領域を D とする．

(1) 点 (x, y) が領域 D 内を動くとき，$2x^2+y^2+3x-2y+1$ のとる値の最大値，最小値を求めよ．

(2) 点 (x, y) が領域 D 内を動くとき，$x^2-4xy+4y^2+2x+y+1$ のとる値の最大値，最小値を求めよ．

Ⅲ．$0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$ のとき，x, y の関数 $f(x, y)=yx^2+2yx-6y^2x+3y^2$ の最大値を求めよ．

$\boxed{8}$ [2008 東京理科大]

(1)　正の定数 a に対して，式 $z=-ay^2+2a^2y-2a^3+a$ を考える。y が範囲 $0 \leqq y \leqq 2a$ を動くとき，z のとりうる値の範囲を，a を用いて表せ。

(2)　式 $z=-xy^2+2x^2y-2x^3+x$ を考える。x，y が条件 $0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 2x$ を満たしながら動くとき，z の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの x，y の値を求めよ。

$\boxed{9}$ [甲南大]

$P=a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca$ とおく.

(1) 任意の実数 a, b, c に対して $P \geqq 0$ となることを示せ.

(2) $0 \leqq a \leqq 1, 1 \leqq b \leqq 2, 2 \leqq c \leqq 3$ のとき P の最小値を求めよ．また，そのときの a, b, c の値を求めよ.

$\boxed{10}$［2003 東北学院大］

(1)　$x-2y=t$ とおくとき，$x^2-4xy+4y^2+2x-4y+3$ を t で表せ．

(2)　x，y が不等式 $x^2\leqq 16$，$2y^2+3y+1\leqq 0$ を満たすとき，$x^2-4xy+4y^2+2x-4y+3$ の最大値と最小値を求めよ．

$\boxed{11}$［神奈川大］

平面上の集合 M と x, y の 2 次式 F が

$M=\{(x, y)\mid x+2y\leqq 7, x\geqq 0, y\geqq 0\}$，

$F=4xy-6x+4y^2+x^2+4-12y$

で与えられるとき，

(1) $x+2y=t$ とおき，F を t で表せ．

(2) 点 (x, y) が集合 M 上を動くとき，F の最大値と最小値を求めよ．

$\boxed{12}$ [(1) 2009 立教大　(2) 2007 関西大]

(1) $x+y=3$ ならば，x^2+y^2 は $x=$ ア$\boxed{}$ のとき最小値 イ$\boxed{}$ をとる。

(2) $x+y=1$，$0\leqq x\leqq 2$ のとき，$x-2y^2$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{13}$ [(1) 2002 法政大　(2) 2007 関西学院大]

(1) $y+2x=1$ のとき，x^2+y^2 の最小値を求めよ.

(2) $y-3x=1$ $(-2\leqq y\leqq 1)$ のとき，x^2+2y^2 は $x=$ ア$\boxed{}$，$y=$ イ$\boxed{}$ で最大値 ウ$\boxed{}$ をとり，$x=$ エ$\boxed{}$，$y=$ オ$\boxed{}$ で最小値 カ$\boxed{}$ をとる。

$\boxed{14}$ [1997 同志社大]

実数 x, y が $x+y=1$ および $x\geqq 0, y\geqq 0$ を満たすとき

(1)　xy の最大値と最小値を求めよ.

(2)　$x^2y^2+x^2+y^2+xy$ の最大値と最小値を求めよ.

$\boxed{15}$ [Ⅰ. 2021 東北学院大　Ⅱ. 1996 近畿大]

Ⅰ. 実数 x，y が $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x+y=2$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1)　xy の最大値と最小値およびそのときの x，y の値を求めよ。

(2)　$t=xy$ とおくとき，$x^2y^2+x^2+3xy+y^2$ を t の式で表せ。

(3)　$x^2y^2+x^2+3xy+y^2$ の最大値と最小値およびそのときの x，y の値を求めよ。

Ⅱ. 実数 x, y が $x^2+2xy+y^2+x+y-6=0$ を満たすとき，xy は $x=$ ア$\boxed{}$，$y=$ イ$\boxed{}$ で最大値 ウ$\boxed{}$ をとり，x^2+2y^2 は $x=$ エ$\boxed{}$，$y=$ オ$\boxed{}$ で最小値 カ$\boxed{}$ をとる.

高2数学　夏期講習　最大･最小問題　第2講　2変数関数の最大･最小(2)

$\boxed{16}$ [(1) 2008 摂南大　(2) 2011 関西大　(3) 2005 関西大]

(1) x，y が条件 $x^2+y^2=1$ を満たすとき，$2x^2+2y-1$ の最大値，最小値を求めよ。
(2) 実数 x，y が $2x^2+y^2=8$ を満たすとき，x^2+y^2-6x の最大値を求めよ。
(3) x，y が実数で $3x^2+2y^2=-2x$ を満たすとき，x^2+y^2 の最大値を求めよ。

$\boxed{17}$ [(2) 長崎総合科学大　(3) 1997 近畿大]

(1) 実数 x, y が $x^2+y^2=4$ を満たしているとき，$4x+2y^2$ の最大値と最小値，およびそのときの x, y の値を求めよ．
(2) x, y を実数とする．$x^2+2y^2=1$ のとき，$x+3y^2$ の最大値と最小値を求めよ．
(3) 実数 x, y が $5x^2+2y^2=7x$ を満たすとき，x^2+y^2 は $x=$ ア $\boxed{}$ において最大値 イ $\boxed{}$ をとり，$x=$ ウ $\boxed{}$ において最小値 エ $\boxed{}$ をとる．

$\boxed{18}$ [2002 同志社女子大]

$2x^2+3y^2+4x+6$ は，x，y が任意の値をとって変化するとき，$x=$ ア $\boxed{}$，$y=$ イ $\boxed{}$ で最小値 ウ $\boxed{}$ をとるが，x，y が $x^2+y^2=9$ を満たしながら変化するときは，$x=$ エ $\boxed{}$，$y=$ オ $\boxed{}$ で最小値 カ $\boxed{}$ をとり，$x=$ キ $\boxed{}$，$y=\pm\sqrt{\text{ク}\boxed{}}$ で最大値 ケ $\boxed{}$ をとる．

$\boxed{19}$ [(1) 2002 北見工業大　(2) 関西大　(3) 2000 武蔵工業大　(4) 大阪大]

(1) x，y が $x^2+y^2=2$ を満たすとき，$x+y$ の最大値は ア $\boxed{}$ であり，最小値は イ $\boxed{}$ である．
(2) 実数 x, y について，$x^2+2y^2=1$ が成り立つとき，$3x-4y$ の最大値および最小値を求めよ．
(3) x，y が実数で，$x^2+y^2=2x$ を満たすとき，$x+y$ の最大値と最小値を求めよ．
(4) x, y が $x\geqq 0, y\geqq 0, x^3+y^3=1$ を満たしながら変わるとき，$x+y$ がとり得る値の範囲を求めよ．

$\boxed{20}$ [(1) 2004 明治大　(2) 2003 星薬科大　(3) 青山学院大　(4) 岡山県立大]

(1) 実数 x，y が $x^2+y^2=1$ を満たすとき，$2x-y$ の最大値を求めよ．
(2) 実数 x，y が $2x^2+3y^2=1$ を満たすとき，$\dfrac{y}{x-1}$ の最大値と最小値を求めよ．
(3) 点 (x, y) が，方程式 $x^2+y^2-4x-4y+3=0$ を満たしながら動くとき，$x+2y$ の最大値は $\boxed{}$ で最小値は $\boxed{}$ である．
(4) 実数 x, y が $x^3+y^3=3xy$ を満たすとき，$x+y$ のとりうる値の範囲を求めよ．

$\boxed{21}$ [鳴門教育大]

実数の変数 x, y の間に $x^2+y^2=18$ の関係があるとき，関数 $(x+y)^2-6(x+y)+12$ の最大値，最小値とそのときの x, y の値を求めよ．

$\boxed{22}$ [1997 琉球大]

実数 x, y が方程式 $x^2+y^2-6x=0$ を満たすとき，x の最大値，y の最小値および $x+2y$ の最大値，最小値を求めよ．

$\boxed{23}$

(1) $x^2+y^2=6x-8y$ のとき，x, y のそれぞれの最大値，最小値を求めよ．

(2) 実数 x, y が $x^2-xy+y^2-y-1=0$ を満たすとき，y の最大値と最小値を求めよ．

$\boxed{24}$ [1996 神戸学院大]

x, y が実数で $x^2-2xy+2y^2=2$ であるとき

(1)　x のとりうる値の範囲を求めよ．

(2)　$-x^2-2x+1$ のとりうる値の範囲を求めよ．

(3)　$x+2y$ のとりうる値の範囲を求めよ．

$\boxed{25}$ [Ⅰ．2013 東京理科大　Ⅱ．2009 慶応義塾大　Ⅲ．2012 東京大]

Ⅰ．等式 $x^2-6xy+12y^2=1$ を満たす正の実数 x，y を考える。

(1)　$z=x+3y$ は $x=$ ア $\boxed{}$，$y=$ イ $\boxed{}$ のとき，最大値 ウ $\boxed{}$ をとる。

(2)　$z=xy$ は $x=$ エ $\boxed{}$，$y=$ オ $\boxed{}$ のとき，最大値 カ $\boxed{}$ をとる。

Ⅱ．座標平面上の点 $(x,\ y)$ が $x^2-2xy+2y^2=4$ を満たして動くとき

(1)　$x+y$ の最大値を求めよ。　　(2)　$\dfrac{x}{y+4}$ の最大値を求めよ。

Ⅲ．座標平面上の点 $(x,\ y)$ が次の方程式を満たす。

$$2x^2+4xy+3y^2+4x+5y-4=0$$

このとき，x のとりうる最大の値を求めよ。

$\boxed{26}$［Ⅰ．2015 名城大　Ⅱ．2015 学習院大］

Ⅰ．点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が原点 O を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円周上を動くとき，$\sqrt{3}x+y$ の最小値は $^{ア}\boxed{}$ であり，$x^2+2xy+3y^2$ の最大値は $^{イ}\boxed{}$ である。

Ⅱ．xy 平面上に 2 点 $\mathrm{A}(0,\ 2)$，$\mathrm{B}(2,\ 2)$ と円 $C：x^2+y^2=1$ がある。点 P が C 上を動くとき $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ の最大値と最小値を求め，また，それらを与える P の座標を求めよ。

$\boxed{27}$［Ⅰ．名古屋市立大　Ⅱ．2010 津田塾大　Ⅲ．2014 東京理科大］

Ⅰ．実数 $x,\ y$ が $x^2+y^2=1$ を満たすとき，次の各式のとり得る値の最大値と最小値，およびそれらをとるときの $x,\ y$ の値を求めよ．

(1) x^2+y　　(2) $x-y$　　(3) $2x^2-xy+3y^2$

Ⅱ．原点を中心とする単位円の $y \geqq 0$ の部分を C とし，2 点 $\mathrm{A}(-1,\ \sqrt{3})$ と $\mathrm{B}(3,\ \sqrt{3})$ を考える。点 P が曲線 C 上を動くとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ が最小となるような P の座標を求めよ。

Ⅲ．座標平面に点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$ があり，等式 $x^2+y^2-6x-8y+21=0$ を満たすように点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を動かす。線分 AP と BP について考える。

$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ は $x=\dfrac{^{ア}\boxed{}}{^{イ}\boxed{}}$，$y=\dfrac{^{ウ}\boxed{}}{^{エ}\boxed{}}$ のとき，最小値 $^{オ}\boxed{}$ をとり，

$x=\dfrac{^{カ}\boxed{}}{^{キ}\boxed{}}$，$y=\dfrac{^{ク}\boxed{}}{^{ケ}\boxed{}}$ のとき，最大値 $^{コ}\boxed{}$ をとる。

$\boxed{28}$［東京理科大］

座標平面において，点 $(x,\ y)$ が楕円 $4x^2+9y^2=36$ 上を動く．このとき，

(1) $x+2y$ の最大値とそのときの $x,\ y$ の値を求めよ．

(2) $x^2+\dfrac{2}{3}xy+\dfrac{3}{2}y^2$ の最大値とそのときの $x,\ y$ の値を求めよ．

$\boxed{29}$［(1) 福岡教育大　(2) 2006 早稲田大］

(1) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$ 上を動くとき，$x^2+4\sqrt{3}xy-4y^2$ の最大値と最小値を求めよ．

(2) x，y が $2x^2+3y^2=1$ を満たす実数のとき，x^2-y^2+xy の最大値を求めよ。

$\boxed{30}$［高知大］

すべての実数 x, y に対して不等式

$$a(x^2+y^2) \leqq x^2+3xy+5y^2 \leqq b(x^2+y^2)$$

を満たす a, b のうち最大の a と最小の b を求めよ．

$\boxed{31}$［2015 大阪大］

実数 x，y が $|x| \leqq 1$ と $|y| \leqq 1$ を満たすとき，不等式

$$0 \leqq x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$$

が成り立つことを示せ。

$\boxed{32}$［(1) 中央大　(2) 大阪市立大］

(1) x, y を実数とする．$x^2-2xy+5y^2=1$ を満たすとき，x^2+y^2 の最大値と最小値を求めよ．

(2) $13x^2-8xy+7y^2=1$ のとき，x^2+y^2 の最大値と最小値を求めよ．

$\boxed{33}$［2007 学習院大］

実数 x，y が $19x^2+6xy+11y^2=1$ を満たしながら動くとき，x^2+y^2 の最大値，最小値，および，それらを与える x，y の値を求めよ。

高2数学　夏期講習　最大･最小問題　第3講　2変数関数の最大･最小(3)

$\boxed{34}$ [(1) 信州大　(2) 慶応義塾大　(3) 宮城教育大　(4) 青山学院大]

(1) 実数 $x,\ y$ が $4^x+2^x\cdot3^y+9^y=7$ を満たすとき，$2^{x+1}+3^{y+1}$ がとりうる値の範囲を求めよ.

(2) 2 つの正の実数 x，y について，$xy^2=10$ のとき，$\log_{10}x\cdot\log_{10}y$ の最大値は $\dfrac{{}^{ア}\boxed{}}{{}^{イ}\boxed{}}$ である。

(3) $x\geqq1$ かつ $y\geqq3$ かつ $xy^2=27$ のとき，$(\log_3x)\cdot(\log_3y)$ の最大値と最小値を求めよ。

(4) 実数 x，y が $(\log_3x)^2+(\log_3y)^2=\log_3x^2-\log_3y^2$ を満たすとき，$\log_3x$，xy，$\dfrac{x}{y}$ のとりうる値の範囲をそれぞれ求めよ。

$\boxed{35}$ [(1) 駒澤大　(2) 星薬科大　(3) 関西学院大　(4) 青山学院大　(5) 防衛大学校]

(1) x，y はともに正の実数で，$xy=8$ を満たす。このとき，$(\log_2x)^2+(\log_2y)^2$ の最小値は $\dfrac{{}^{ア}\boxed{}}{{}^{イ}\boxed{}}$，そのとき x は ${}^{ウ}\boxed{}\sqrt{{}^{エ}\boxed{}}$ となる。

(2) x，y が等式 $x^3y^2=81$ $\left(ただし，x\geqq\dfrac{1}{3},\ y\geqq\dfrac{1}{3}\right)$ を満たすとき，$(\log_3x)^2+\log_3y$ の最大値と最小値を求めよ.

(3) 正の実数 x，y が $(\log_2x)^2+(\log_2y)^2=\log_2x^2+\log_2y^4$　……① を満たしながら変化している。$X=\log_2x$，$Y=\log_2y$ とおくと，① は X，Y を用いて表すと $(X-1)^2+(Y-2)^2={}^{ア}\boxed{}$ である。このとき，$\log_2xy^2$ は $(x,\ y)={}^{イ}\boxed{}$ で最大値をとり，$(x,\ y)={}^{ウ}\boxed{}$ で最小値をとる。

(4) $x\geqq1$，$y\geqq1$ で $(\log_2x-1)^2+(\log_2y)^2=5$ とする。このとき，x^2y の最大値と最小値を求めよ。

(5) $(\log_{10}x)^2=\log_{10}y$ という関係があるとき，xy の最小値を求めよ.

$\boxed{36}$ [Ⅰ. 2012 東北大　Ⅱ. 2014 星薬科大　Ⅲ. 2011 岐阜聖徳学園大]

Ⅰ. 実数 x，y が $4^x-4\cdot2^x+9^y-2\cdot3^y\leqq-1$ を満たすとき，2^x+3^y のとりうる値の範囲を求めよ。

Ⅱ. $x\geqq1$，$y\geqq1$，$3\leqq xy\leqq81$ とする。$k=\dfrac{1}{4}\log_3x+\log_3y$ とおくとき，k がとりえる値の範囲は $\dfrac{{}^{ア}\boxed{}}{{}^{イ}\boxed{}}\leqq k\leqq{}^{ウ}\boxed{}$ であり，また，$k=1$ ならば，$\log_3x$ の最大値は ${}^{エ}\boxed{}$，$\log_3y$ の最大値は ${}^{オ}\boxed{}$ である。

Ⅲ. 正の実数 x，y が $(\log_3x)^2+(\log_3y)^2\leqq\log_3x+\log_3y$ を満たしている。

(1)　$u=\log_3x$，$v=\log_3y$ とおく。このとき，uv 平面において点 $(u,\ v)$ の存在範囲を図示せよ。

(2)　xy のとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{37}$ [Ⅰ. 2021 金沢工業大　Ⅱ. 2019 摂南大　Ⅲ. 2006 成城大]

Ⅰ. 座標平面上で，連立不等式 $x\geqq0$，$y\geqq0$，$3^x+2^{y+2}\leqq21$，$3^{x+1}+2^y\leqq19$ の表す領域を D とし，点 $(x,\ y)$ が領域 D を動くとする。

(1)　3^x+2^y の最大値は ${}^{ア}\boxed{}$ であり，最小値は ${}^{イ}\boxed{}$ である。

(2)　$\dfrac{2^y}{3^x}$ の最大値は ${}^{ウ}\boxed{}$ であり，最小値は $\dfrac{{}^{エ}\boxed{}}{{}^{オ}\boxed{}}$ である。

(3)　9^x+4^y の最大値は ${}^{カ}\boxed{}$ であり，最小値は ${}^{キ}\boxed{}$ である。

Ⅱ. x，y は $x\geqq1$，$y\geqq1$，$8\leqq x^3y^4\leqq64$ を満たす。このとき $(\log_2x)^2+(\log_2y)^2$ の最大値は ${}^{ア}\boxed{}$ であり，最小値は $\dfrac{{}^{イ}\boxed{}}{{}^{ウ}\boxed{}}$ である。

Ⅲ. 正の数 x，y が $(\log_2x)^2+(\log_2y)^2\leqq\log_2\dfrac{x^2}{2\sqrt{2}\,y^2}$ を満たしながら動くとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\log_2x=X$，$\log_2y=Y$ として，上式を X と Y で表せ。

(2)　点 $(X,\ Y)$ の存在範囲を図示せよ。

(3)　xy の最大値と，そのときの x と y の値を求めよ。

高2数学　夏期講習　最大･最小問題　第4講　2変数関数の最大･最小(4)

$\boxed{38}$ [2012 弘前大]

点 $(a,\ b)$ は円周 $x^2+y^2=1$ 上を動くとする。

(1) $t=a+b$ とおくとき，$a+ab+b$ を t の式で表せ。

(2) $a+ab+b$ の最大値と最小値を求めよ。また，そのときの $t=a+b$ の値をそれぞれ求めよ。

$\boxed{39}$ [Ⅰ．1997 日本女子大　Ⅱ．1997 関西学院大]

Ⅰ．x, y が方程式 $x^2+y^2-2(x+y)-6=0$ を満たすとき

(1) $x+y$ のとりうる値の範囲を求めよ.

(2) $x+y-2xy$ の最大値を求めよ.

Ⅱ．変数 x, y は $x^2+y^2=1, x>0$ を満たす実数とする.

(1) $t=x+y$ とおくとき，t のとりうる値の範囲を求めよ.

(2) $S=3x^2+8xy+3y^2$ とおくとき，S の最大値，最小値およびそのときの x, y の値を求めよ.

$\boxed{40}$ [Ⅰ．2011 神戸大　Ⅱ．2011 慶応義塾大]

Ⅰ．実数 $x,\ y$ に対して，等式 $x^2+y^2=x+y$　…… ① を考える。$t=x+y$ とおく。

(1) ① の等式が表す xy 平面上の図形を図示せよ。

(2) x と y が ① の等式を満たすとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) x と y が ① の等式を満たすとする。$F=x^3+y^3-x^2y-xy^2$ を t を用いた式で表せ。また，F のとりうる値の最大値と最小値を求めよ。

Ⅱ．xy 平面上に，円 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ と，その円上を動く点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ がある。
$x+y=t$ とおくとき，

(1) t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) xy を t の式で表せ。

(3) x^3+y^3 のとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{41}$ [Ⅰ．横浜市立大　Ⅱ．2014 近畿大　Ⅲ．2012 名古屋市立大]

Ⅰ．x, y が $x \geqq 0, y \geqq 0$ かつ $x^2+y^2=2$ を満たしながら動くとき，x^3+y^3 のとりうる範囲を求めよ.

Ⅱ．条件 $(x-2)^2+(y-2)^2=4$ を満たす実数 $x,\ y$ を考える。$t=x+y$ とおく。

(1) t のとりうる値の範囲は

$$\boxed{\text{ア}}-\boxed{\text{イ}}\sqrt{\boxed{\text{ウ}}} \leqq t \leqq \boxed{\text{エ}}+\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$$ である。

(2) $z=x^3+y^3-6xy$ を t で表すと

$$z=-\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}t^3+\boxed{\text{ケ}}t^2+\boxed{\text{コ}}t-\boxed{\text{サ}}$$ となり，z の最大値は

$\boxed{\text{シ}}+\boxed{\text{ス}}\sqrt{\boxed{\text{セ}}}$ であり，z の最小値は $\boxed{\text{ソ}}-\boxed{\text{タ}}\sqrt{\boxed{\text{チ}}}$ である。

Ⅲ．実数 $x,\ y$ が $4x^2+y^2=1$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1) $u=2x+y$ の最小値，最大値を求めよ。

(2) xy を u で表せ。

(3) $8x^3+y^3+8xy$ の最小値，最大値を求めよ。

$\boxed{42}$［2021 関西学院大］

2 つの実数 x，y は関係式 $x^2-xy+y^2=2$ を満たしながら動くとする。このとき，$x+y-xy$ の最大値を求めよう。$s=x+y$ とおくとき，xy を s の式で表すと $xy=$ ア$\boxed{}$ である。また，s のとりうる値の範囲は イ$\boxed{}\leqq s\leqq$ ウ$\boxed{}$ である。したがって，$x+y-xy$ の最大値は エ$\boxed{}$ である。

$\boxed{43}$［2004 大阪教育大］

x と y は $x^2+xy+y^2=1$ を満たす実数とする．また，$w=xy-x-y$ とする．

(1)　$p=x+y$ とするとき，w を p で表せ．

(2)　実数 x と y が $x^2+xy+y^2=1$ を満たして動くとき，w のとりうる値の範囲を求めよ．

$\boxed{44}$［2010 防衛大学校］

実数 x，y について，関係式 $x^2+xy+y^2=3$ が成り立つとする。

(1)　$x+y=s$，$xy=t$ とおくとき，t を s の式で表せ。

(2)　s のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　$x^2+y^2+x+y=k$ とおくとき，k を s の式で表せ。

(4)　k のとりうる値の最大値 M と最小値 m を求めよ。

$\boxed{45}$［2023 高知大］

実数 x，y が $x^2-xy+y^2-1=0$ を満たすとする。また，$t=x+y$ とおく。

(1)　xy を t を用いて表せ。

(2)　t のとる値の範囲を求めよ。

(3)　$3x^2y+3xy^2+x^2+y^2+5xy-6x-6y+1$ のとる値の範囲を求めよ。

$\boxed{46}$［Ⅰ．2009 同志社大　Ⅱ．2012 京都大］

Ⅰ．実数 x，y が $x^2+xy+y^2=1$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1)　$x+y=u$，$xy=v$ とする。u，v の満たす関係式を求めよ。また，u の最大値と最小値を求めよ。

(2)　x^2+y^2 の最大値と最小値を求めよ。

(3)　x^3+y^3 の最大値と最小値を求めよ。

Ⅱ．実数 x，y が条件 $x^2+xy+y^2=6$ を満たしながら動くとき $x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$ がとりうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{47}$ [信州大]

点 (x, y) が領域 $\{(x, y) \mid x^2+y^2 \leqq 1\}$ を動くとする．
(1) 点 $(x+y, xy)$ はどのような範囲を動くか，図示せよ．
(2) $x+y+xy$ のとる範囲を求めよ．

$\boxed{48}$ [Ⅰ．青山学院大　Ⅱ．2022 早稲田大]

Ⅰ．x, y は $x^2+y^2<1, x>0, y>0$ を満たす変数である．このとき，
(1) 点 (x, y) の存在範囲を図示せよ．
(2) $z=2x+y$ の取り得る値の範囲を求めよ．
(3) $u=x+y, v=xy$ とおいて，点 (u, v) の存在範囲を図示せよ．
(4) $z=x+y-4xy$ の取り得る値の範囲を求めよ．

Ⅱ．実数 x，y が $x^2+y^2 \leqq 3$ を満たしているとき，$x-y-xy$ の最大値は $\boxed{}$ である。

$\boxed{49}$

(1) 実数 x, y が $-1<x+y<2, 1<x-y<5$ をみたすとき，$2x+y$ のとり得る値の範囲を求めよ．
(2) $-4 \leqq -x+2y \leqq 3, 3 \leqq 2x-y \leqq 6$ のとき，$x^2-2xy+2y^2$ の最大値と最小値を求めよ．

$\boxed{50}$ [Ⅰ．2008 東京女子大　Ⅱ．大同工業大　Ⅲ．2017 東京理科大]

Ⅰ．実数 x，y が $0 \leqq 2x+y \leqq 1$ かつ $0 \leqq x-y \leqq 1$ を満たす範囲を動くとき，以下のものを求めよ。
(1)　x のとりうる値の範囲　　　(2)　y のとりうる値の範囲
(3)　$x+y$ のとりうる値の範囲

Ⅱ．点 (x, y) は $1 \leqq x+2y \leqq 2$ かつ $2 \leqq 2x+y \leqq 4$ を満たす範囲を動くとする．
(1) $u=x+2y, v=2x+y$ とおくとき，$F=x^2+xy+y^2$ を u, v で表せ．
(2) u を固定するとき，F の最大値を u で表せ．
(3) F の最大値を求めよ．

Ⅲ．(1)　等式 $x^2+y^2=1$ を満たす実数 x，y を考える。$u=3x+y+3$，$v=2x-2y+3$ とするとき，$\dfrac{u}{v}$ の最大値は ${}^{ア}\boxed{}+\sqrt{{}^{イ}\boxed{}}$ であり，最小値は ${}^{ウ}\boxed{}-\sqrt{{}^{エ}\boxed{}}$ である。
(2)　$0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$ を満たす実数 x，y を考える。$u=4x-6y+3$，$v=4x+3y-1$ とするとき，u^2+v^2 の最大値は ${}^{オ}\boxed{}$ であり，最小値は $\dfrac{{}^{カ}\boxed{}}{{}^{キ}\boxed{}}$ である。

$\boxed{51}$ [2011 東京都市大]

2 次関数 $f(x)=ax^2+b$ (a, b は定数) について，2 つの不等式 $1 \leqq f(0) \leqq 2$，$1 \leqq f(1) \leqq 2$ がともに成立しているとする。

(1)　2 つの不等式 $1 \leqq f(0) \leqq 2$，$1 \leqq f(1) \leqq 2$ を満たす点 $(a,\ b)$ の領域を図示せよ。

(2)　$f(2)$ がとりうる最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{52}$ [Ⅰ. 2009 上智大　Ⅱ. 2017 大阪大]

Ⅰ. 1 次関数 $f(x)=ax+b$ で，条件 $3 \leqq f(1) \leqq 6$，$4 \leqq f(2) \leqq 8$ を満たすものを考える。このような 1 次関数 $f(x)$ の中で，$f(5)$ が最大となるのは，$a=$ ${}^{ア}\boxed{}$，$b=$ ${}^{イ}\boxed{}$ のときで，$f(5)=$ ${}^{ウ}\boxed{}$ である。また，$f(5)$ が最小となるのは，$a=$ ${}^{エ}\boxed{}$，$b=$ ${}^{オ}\boxed{}$ のときで，$f(5)=$ ${}^{カ}\boxed{}$ である。

Ⅱ. b，c を実数とする。2 次関数 $f(x)=-x^2+bx+c$ が $0 \leqq f(1) \leqq 2$，$5 \leqq f(3) \leqq 6$ を満たすとする。

(1)　$f(4)$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標 q のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標が 6 のとき，放物線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。