

発展問題演習 5. 三角

II

正弦定理より

$$\frac{BC}{\sin \frac{\pi}{3}} = 2$$

$$\therefore BC = 2 \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

$$\angle C = \theta \text{ とすると, } \angle B = \frac{2\pi}{3} - \theta \quad (0 < \theta < \frac{2\pi}{3})$$

$$\frac{AB}{\sin \theta} = 2 \quad \therefore AB = 2 \sin \theta$$

$$\frac{CA}{\sin(\frac{2\pi}{3} - \theta)} = 2 \quad \therefore CA = 2 \sin(\frac{2\pi}{3} - \theta)$$

よって

$$\begin{aligned} AB + BC + CA &= 2 \sin \theta + 2 \sin(\frac{2\pi}{3} - \theta) + \sqrt{3} \\ &= 2 \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta + \sin \theta + \sqrt{3} \\ &= 3 \sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta + \sqrt{3} \\ &= 2\sqrt{3} \sin(\theta + \frac{\pi}{6}) + \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \text{ とすると } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ のとき 最大}$$

$$\text{最大値 } 3\sqrt{3}$$

<point>

1. 三角

2. 正弦定理

III

d) PがA, B, C上にありとき

$$PA^2 + PB^2 + PC^2 \text{ は定数}$$

$$AB^2 + AC^2$$

$$AB^2 + BC^2$$

$$AC^2 + BC^2$$

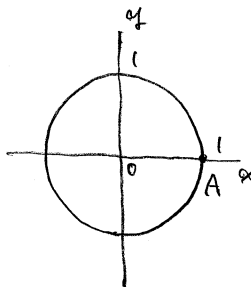
よって P がどこにいても

$$AB = BC = CA$$

で定数は必要

2点から等距離な点もう1点も等距離な点

$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3PA^2$ と P の位置により値が異なる
よって不合理



3点から等距離な点

$$B(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), C(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) \text{ とする}$$

$$P(\cos \theta, \sin \theta) \quad (0 \leq \theta < 2\pi) \text{ とする}$$

$$\begin{aligned} PA^2 + PB^2 + PC^2 &= (\cos \theta - 1)^2 + \sin^2 \theta \\ &\quad + (\cos \theta + \frac{1}{2})^2 + (\sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 \\ &\quad + (\cos \theta + \frac{1}{2})^2 + (\sin \theta + \frac{\sqrt{3}}{2})^2 \\ &= 2 - 2\cos \theta + 2\cos^2 \theta + 2\sin^2 \theta + \frac{1}{2} \\ &\quad + 2\sin \theta + \frac{3}{2} \\ &= 6 \text{ (一定)} \end{aligned}$$

$$B(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}), C(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}) \text{ とする}$$

e) 2点から等距離な点 P が弧 AB 上にありとき

$$\angle PCA = \theta \text{ とすると } \angle PCB = \frac{\pi}{3} - \theta \quad (0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3})$$

正弦定理より

$$\frac{PA}{\sin \theta} = 2 \quad \therefore PA = 2 \sin \theta$$

$$\frac{PB}{\sin(\frac{\pi}{3} - \theta)} = 2 \quad \therefore PB = 2 \sin(\frac{\pi}{3} - \theta)$$

$$\frac{PC}{\sin(\frac{\pi}{3} + \theta)} = 2 \quad \therefore PC = 2 \sin(\frac{\pi}{3} + \theta)$$

よって

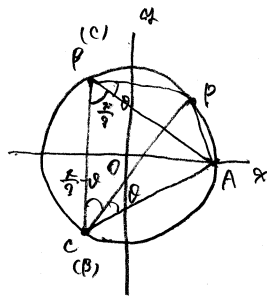
$$\begin{aligned} PA + PB + PC &= 2 \{ \sin \theta + \sin(\frac{\pi}{3} - \theta) + \sin(\frac{\pi}{3} + \theta) \} \\ &= 2 (\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta) \\ &= 4 \sin(\theta + \frac{\pi}{6}) \end{aligned}$$

$$\theta + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} \text{ とすると } \theta = \frac{\pi}{3} \text{ のとき 最大}$$

$$\text{最大値 } 4$$

$$\theta = 0, \frac{\pi}{3} \text{ のとき 最小}$$

$$\text{最小値 } 2\sqrt{3}$$

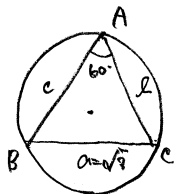


[3]

正弦定理より

$$\frac{a}{\sin 60^\circ} = 2$$

$$\therefore a = 2 \sin 60^\circ = \sqrt{3}$$



$c > b$

余弦定理より

$$3 = b^2 + c^2 - 2bc \cos 60^\circ$$

$$\therefore b^2 + c^2 - bc = 3 \dots ①$$

面積より

$$\frac{1}{2} bc \sin 60^\circ = \frac{3 + \sqrt{3}}{4}$$

$$\therefore bc = \sqrt{3} + 1 \dots ②$$

①より

$$(b+c)^2 - 3bc = 3$$

$$(b+c)^2 = 6 + 3\sqrt{3}$$

$$\therefore b+c = \sqrt{6+3\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}$$

$$t^2 - (b+c)t + bc = 0 \text{ とおくと } t = \frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2} t + (\sqrt{3}+1) = 0$$

②より $bc = \sqrt{3} + 1$ とおくと 2次方程式より

$$2t^2 - (3\sqrt{2}+\sqrt{6})t + 2(\sqrt{3}+1) = 0$$

$$2t - (\sqrt{6}+\sqrt{2})(t - \sqrt{2}) = 0$$

$$\therefore b = \sqrt{2} \quad c = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$$

<point>

1. 余弦定理

2. 三角形の面積

[4]

$AB = AC$ とおす

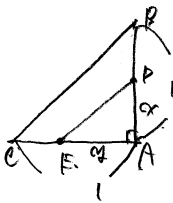
① 二等分線の両端から AB, AC 上に
おすとき

$$(0 < \alpha, \alpha \leq 1)$$

$AD = \alpha, AE = \alpha$ とおす

$$\frac{1}{2} \alpha^2 = \frac{1}{4} \quad \therefore \alpha = \frac{1}{2\alpha}$$

$\triangle ADE$ で三平方の定理より



(相似三角形)

$$DE^2 = \alpha^2 + \alpha^2 = \alpha^2 \cdot \frac{1}{4\alpha^2} \geq 2\alpha \cdot \frac{1}{4\alpha} = 1$$

$$\text{したがって } \alpha = \frac{1}{4\alpha} \quad \therefore \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

このとき 最小値 1 とおす

② 二等分線の両端から AB, AC 上に

$BD = \alpha, BE = \alpha$ とおす

$$\frac{1}{2} \alpha^2 \sin 45^\circ = \frac{1}{4} \quad (\alpha < \alpha \leq 1, 0 < \alpha \leq \sqrt{2})$$

$\triangle BEC$ で余弦定理より

$$DE^2 = \alpha^2 + \alpha^2 - 2\alpha^2 \cos 45^\circ$$

$$= \alpha^2 \left(\frac{1}{2\alpha^2} - 1 \right) \geq \sqrt{2} - 1$$

したがって $\alpha = \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

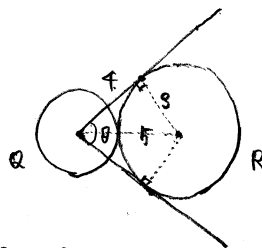
このとき 最小値 $\sqrt{2} - 1$

③ ②より 最小値 1

$$\frac{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}{2}$$

[5]

d)



$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{3}{5} \cdot \cos \frac{\theta}{2} = \frac{4}{5}$$

$$\sin \theta = 2 \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{24}{25}$$

$$\text{① } \cos \theta = \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{7}{25} > 0 \text{ より}$$

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ で $\sin \theta$ は単調増加であり

$$\sin \frac{\pi}{3} < \sin \theta < \sin \frac{\pi}{2} \text{ より}$$

$$\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{\pi}{2}$$

② $\theta < \frac{\pi}{2}$ より 41度は範囲内

51度範囲外とすると $\theta < \frac{2\pi}{3}$ とおす

図のような正四面体を考える

$$\alpha:1=1:\alpha-1$$

$$\alpha(\alpha-1)=1$$

$$\alpha^2 - \alpha - 1 = 0$$

$$\therefore \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\therefore \cos \frac{2\pi}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}+1}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-1}{4} > \frac{7}{25}$$

$$\therefore \theta > \frac{2\pi}{5}$$

よって求める最も個数は 4 個

[6]

(1) $DA = DB = DC$ より

よって $\triangle ABC$ に下ろした

垂線の長さは

$\triangle ABC$ の外心である

$\triangle ABC$ は正三角形であるから外心と重心は一致する

ので H は $\triangle ABC$ の重心である

よって

$$AH = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$d > AH$ より

$$d > \frac{\sqrt{3}}{3}$$

($AB \perp$ 平面 CDH より)

(2) θ を固定したとき P は AB と平面 CDH の交点

よって AB の中点 M にあるとき P は M となる

$\angle CPM = 90^\circ$ のとき

$$\frac{9}{4} = d^2 + d^2 - \frac{1}{4}$$

$$d^2 = \frac{1}{2} \therefore d = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} <$$

(1) $d < \frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき

MP の長さは $\sqrt{d^2 - \frac{1}{4}}$

また $d \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$ のとき

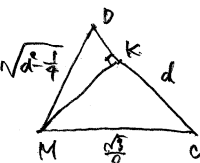
M から CD に下ろした垂線の長さを k とする

MP の長さは

余弦定理より

$$d^2 - \frac{1}{4} = d^2 - \frac{9}{4} - \sqrt{3}d \cos C$$

$$\therefore \cos C = \frac{1}{\sqrt{3}d}$$



$$\sin C = \sqrt{1 - \cos^2 C} = \sqrt{1 - \frac{1}{3d^2}} = \frac{\sqrt{3d^2 - 1}}{\sqrt{3}d} \quad (\sin C > 0)$$

よって

$$MP$$
 の長さは $MP = MC \sin C$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3d^2 - 1}}{\sqrt{3}d} = \frac{\sqrt{3d^2 - 1}}{2d}$$

[7]

(1) $\triangle ABC$ で余弦定理より

$$6^2 = 4^2 + 5^2 - 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot \cos \angle ABC$$

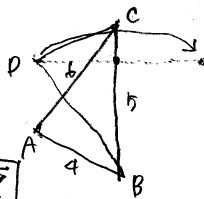
$$\therefore \cos \angle ABC = \frac{1}{8}$$

$$\sin \angle ABC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ABC} = \frac{3\sqrt{7}}{8}$$

($\sin \angle ABC > 0$)

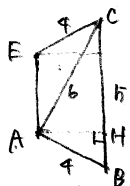
$\triangle ABC$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 \cdot \frac{3\sqrt{7}}{8} = \frac{15\sqrt{7}}{4}$$



(2) $AD^2 = AE^2 + ED^2$ より

$D = E$ のとき $\angle AD < D = F$ のとき



$$S = \frac{15\sqrt{7}}{4}$$

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot AH = \frac{15\sqrt{7}}{4}$$

$$\therefore AH = \frac{3\sqrt{7}}{2}$$

$$BH = \sqrt{16 - \frac{63}{4}} = \frac{1}{2}$$

$D = E$ のとき $AD = 4$

$D = F$ のとき

$$AD = \sqrt{16 + (3\sqrt{7})^2} = \sqrt{79}$$

よって

$$4 < AD < \sqrt{79}$$

(3) 平面 $ABC \perp$ 平面 BCD として θ を変化する

このとき

$$AD = \sqrt{16 + \frac{63}{2}} = \frac{\sqrt{95}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{190}}{2}$$

で θ を変化する

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{15\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{3\sqrt{7}}{2} = \frac{105}{8}$$

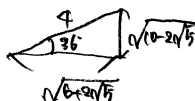
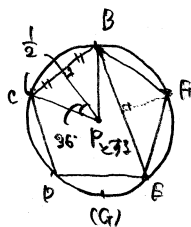
8

d) $3 \cdot 20 \div 5 = 12$

e) $R \sin 36^\circ = \frac{1}{2}$ より

$$R = \frac{1}{2 \sin 36^\circ} = \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

$$\begin{aligned} BE &= 2 \cdot 1 \cdot \cos 36^\circ \\ &= 2 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{4} \\ &= \frac{\sqrt{5}+1}{2} \end{aligned}$$



point

1. 正四面体の体積

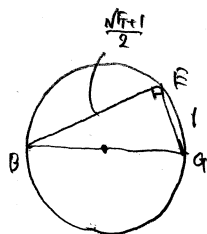
e) B, G, E を通る平面で切ると

BQ は外接円の直径より

$$\angle BEG = 90^\circ$$

三平方の定理より

$$\begin{aligned} BG &= \sqrt{1^2 + \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{2} \end{aligned}$$



e) $OD = OE = OG$ より

O から $\triangle DEQ$ に下ろした垂線の足を

H と $\triangle DEQ$ の外心である

$\triangle DEQ$ は正三角形であるから

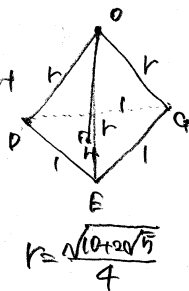
外心は重心と一致する

$$DH = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$OH = \sqrt{r^2 - \frac{1}{3}}$$

$$= \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{16} - \frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{14+6\sqrt{5}}}{\sqrt{48}} = \frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}}$$



三平方より $\triangle DEQ$ の外接円の半径

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{4\sqrt{3}} \\ &= \frac{3+\sqrt{5}}{48} \end{aligned}$$