$\boxed{75}$ [2012 大阪市立大]

三角形 ABC の頂点 A，B，C は反時計回りに並んでいるものとする。点 P はいずれかの頂点の位置にあり，1 枚の硬貨を 1 回投げるごとに，表が出れば時計回りに隣の頂点へ，裏が出れば反時計回りに隣の頂点へ，移動するものとする。点 P は最初，頂点 A の位置にあったとする。硬貨を n 回投げたとき，点 P が頂点 A の位置に戻る確率を a_n で表す。

(1)　$n \geqq 2$ に対し a_n を a_{n-1} を用いて表せ。

(2)　a_n を求めよ。

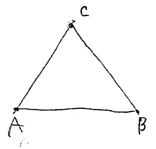
(1)　n−1回目　　n回目

$A \xrightarrow{0} A$

a_{n-1}　　a_n

$B.C \xrightarrow{\frac{1}{2}}$

$1-a_{n-1}$



$a_n = \frac{1}{2}(1-a_{n-1})$

$a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}$,　$a_1 = 0$

$\alpha = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2}$

$\frac{3}{2}\alpha = \frac{1}{2}$　$\therefore \alpha = \frac{1}{3}$

$a_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}(a_n - \frac{1}{3})$

$\{a_n - \frac{1}{3}\}$ は初項 $a_1 - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$

公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列より

$a_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}\cdot(-\frac{1}{2})^{n-1}$

$\therefore a_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\cdot(-\frac{1}{2})^{n-1}$

$\boxed{76}$ [2020 大阪大]

円周を 3 等分する点を時計回りに A，B，C とおく。点 Q は A から出発し，A，B，C を以下のように移動する。1 個のさいころを投げて，1 の目が出た場合は時計回りに隣の点に移動し，2 の目が出た場合は反時計回りに隣の点に移動し，その他の目が出た場合は移動しない。さいころを n 回投げた後に Q が A に位置する確率を p_n とする。

(1)　p_2 を求めよ。　　　(2)　p_{n+1} を p_n を用いて表せ。

(3)　p_n を求めよ。

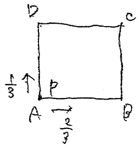
$\boxed{77}$ [2009 和歌山県立医科大]

正方形の頂点を順に A，B，C，D とし，この順を正の向きとし，逆を負の向きとする。動点 P は常に頂点にあり，1 秒ごとに次の頂点に移っていく。このとき，正の向きに次の頂点に移る確率は $\frac{2}{3}$ で，逆の負の向きに次の頂点に移る確率は $\frac{1}{3}$ とする。また，動点 P は最初頂点 A にあるものとする。

(1)　2 秒後に動点 P が頂点 A，C にある確率をそれぞれ求めよ。

(2)　3 秒後に動点 P が頂点 B，D にある確率をそれぞれ求めよ。

(3)　4 以上の自然数 n に対して，n 秒後に動点 P が各頂点にある確率をそれぞれ求めよ。



(1) n秒後に A, B, C, D にある確率をそれぞれ

a_n, b_n, c_n, d_n とする

$a_2 = \frac{2}{3}\times\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{2}{3} = \frac{4}{9}$

$c_2 = \frac{2}{3}\times\frac{2}{3} + \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = \frac{5}{9}$

(2) $b_3 = \frac{2}{3}a_2 + \frac{1}{3}c_2 = \frac{8+5}{27} = \frac{13}{27}$

$d_3 = \frac{2}{3}c_2 + \frac{1}{3}a_2 = \frac{10+4}{27} = \frac{14}{27}$

(3) $a_{n+1} = \frac{2}{3}d_n + \frac{1}{3}b_n$ …①

$b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n$ …②

$c_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{3}d_n$ …③

$d_{n+1} = \frac{2}{3}c_n + \frac{1}{3}a_n$ …④

①, ②, ④ より

$a_{n+1} = \frac{2}{3}(\frac{2}{3}c_{n-1} + \frac{1}{3}a_{n-1}) + \frac{1}{3}(\frac{2}{3}a_{n-1} + \frac{1}{3}c_{n-1})$

$= \frac{4}{9}a_{n-1} + \frac{5}{9}c_{n-1}$

③, ②, ④ より

$c_{n+1} = \frac{2}{3}(\frac{2}{3}a_{n-1} + \frac{1}{3}c_{n-1}) + \frac{1}{3}(\frac{2}{3}c_{n-1} + \frac{1}{3}a_{n-1})$

$= \frac{5}{9}a_{n-1} + \frac{4}{9}c_{n-1}$

i) $n = 2k-1$ ($k = 1, 2, \cdots$) のとき

$a_{2k} = \frac{4}{9}a_{2k-2} + \frac{5}{9}c_{2k-2}$ …⑤

$c_{2k} = \frac{5}{9}a_{2k-2} + \frac{4}{9}c_{2k-2}$ …⑥

⑤+⑥ より

$a_{2k} + c_{2k} = a_{2k-2} + c_{2k-2}$

$\{a_{2k} + c_{2k}\}$ は初項 $a_2 + c_2 = 1$

の定数列より

$a_{2k} + c_{2k} = 1$ …⑦

⑤−⑥ より

$a_{2k} - c_{2k} = -\frac{1}{9}(a_{2k-2} - c_{2k-2})$

$\{a_{2k} - c_{2k}\}$ は初項 $a_2 - c_2 = -\frac{1}{9}$

公比 $-\frac{1}{9}$ の等比数列より

$a_{2k} - c_{2k} = (-\frac{1}{9})^k$ …⑧

⑦, ⑧ より $a_{2k} = \frac{1}{2}\{1 + (-\frac{1}{9})^k\}$, $c_{2k} = \frac{1}{2}\{1 - (-\frac{1}{9})^k\}$

ii) $n = 2k$ のとき

同様に計算すれば

$a_{2k-1} = c_{2k-1} = 0$

i), ii) より

$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2}\{1 + (-\frac{1}{9})^{\frac{n}{2}}\} & (n：偶) \\ 0 & (n：奇) \end{cases}$

$c_n = \begin{cases} \frac{1}{2}\{1 - (-\frac{1}{9})^{\frac{n}{2}}\} & (n：偶) \\ 0 & (n：奇) \end{cases}$

あとは

②, ④ より b_n, d_n も求まる

$\boxed{78}$ [1998 名古屋大]

座標平面上に 4 点 A (0, 1)，B (0, 0)，C (1, 0)，D (1, 1) を頂点とする正方形を考え，この正方形の頂点上を点 Q が 1 秒ごとに 1 つの頂点から隣の頂点に移動しているとする．更に，点 Q は，x 軸と平行な方向の移動について確率 p，y 軸と平行な方向の移動について確率 $1-p$ で移動しているものとする．最初に点 Q が頂点 A にいたとするとき，n 秒後に頂点 A，C にいる確率をそれぞれ a_n，c_n とする．a_n，c_n を求めよ．

$\boxed{79}$ [2000 工学院大]

四面体 OABC の頂点を移動する点 P がある．点 P は 1 つの頂点に達してから 1 秒後に，他の 3 つの頂点のいずれかにおのおの確率 $\frac{1}{3}$ で移動する．頂点 O にいた点 P がそれから n 秒後に頂点 A にいる確率を p_n とする．

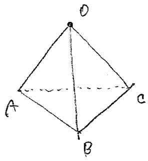
(1)　p_{n+1} を p_n を用いて表せ．

(2)　p_n を求めよ．

(1)　n秒後　n+1秒後

A p_n —O— A p_{n+1}

O,B,C $1-p_n$　$\frac{1}{3}$



$p_{n+1}=\frac{1}{3}(1-p_n)$

(2)　$p_{n+1}=-\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}$，$p_1=\frac{1}{3}$　　$\alpha=-\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{3}$　$\therefore \alpha=\frac{1}{4}$

$p_{n+1}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{3}(p_n-\frac{1}{4})$

$\{p_n-\frac{1}{4}\}$ は初項 $p_1-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}$

公比 $-\frac{1}{3}$ の等比数列より

$p_n-\frac{1}{4}=\frac{1}{12}(-\frac{1}{3})^{n-1}$

$\therefore p_n=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}(-\frac{1}{3})^{n-1}$ //

$\boxed{80}$ [1996 富山大]

正四面体 ABCD の 4 つの頂点を移動する点 P がある．点 P がいずれの頂点にあるときも 1 ステップ後に同じ頂点にとどまる確率は $\frac{2}{5}$ であり，他の頂点に移動する確率はいずれも $\frac{1}{5}$ である．頂点 A から出発した点 P が n ステップ後に頂点 A にある確率を a_n，頂点 B にある確率を b_n とする．ただし，$a_0=1, b_0=0$ とする．

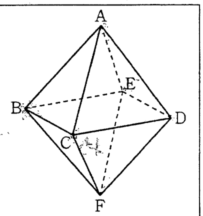
(1)　a_1, b_1, a_2, b_2 を求めよ．

(2)　a_{n+1}，b_{n+1} を a_n，b_n で表せ．

(3)　a_{n+2}, a_{n+1}, a_n の関係式を導き，a_n, b_n を求めよ．

$\boxed{81}$ [2000 名古屋市立大]

図のような正八面体 ABCDEF がある．動点 P は最初，頂点 A 上にあるが，1 回の操作で 1 辺を伝わり最も近い他の頂点に移動させる．1 回の操作で，最も近い頂点の中でどの頂点に移動させるかは無作為に決める．この操作を繰り返し，点 P を移動させていく場合，n 回の操作が完了した時点で点 P が頂点 A，B，C，D，E，F にある確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n，d_n，e_n，f_n とする．



(1)　数学的帰納法により，$b_n=c_n=d_n=e_n$ $(n\geqq 1)$ を示せ．

(2)　a_{n+1}，f_{n+1} を b_n で表し，また，数列 $\{b_n\}$ の漸化式を求めよ．

(3)　a_n，b_n，f_n を求めよ．

(1) (i) $n=1$ のとき

$b_1=c_1=d_1=e_1=\frac{1}{4}$ より成り立つ

(ii) $n=k$ ($k=1,2,\cdots$) のとき成り立つと仮定して

$b_k=c_k=d_k=e_k$ …①

$n=k+1$ のとき成り立つことを示す

$b_{k+1}=(a_k+f_k+c_k+e_k)\times\frac{1}{4}$

$c_{k+1}=(a_k+f_k+b_k+d_k)\times\frac{1}{4}$

$d_{k+1}=(a_k+f_k+c_k+e_k)\times\frac{1}{4}$

$e_{k+1}=(a_k+f_k+b_k+d_k)\times\frac{1}{4}$

①より $b_{k+1}=c_{k+1}=d_{k+1}=e_{k+1}$

(i), (ii) から数学的帰納法より

題意は示された □

(2)　$a_{n+1}=(b_n+c_n+d_n+e_n)\times\frac{1}{4}$

$=b_n$ ((1)より)

$f_{n+1}=b_n$

$a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}+d_{n+1}+e_{n+1}+f_{n+1}=1$ より

$2b_n+4b_{n+1}=1$ //

(3)　$b_{n+1}=-\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{4}$，　$\alpha=-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{4}$　$\therefore \alpha=\frac{1}{6}$

$b_{n+1}-\frac{1}{6}=-\frac{1}{2}(b_n-\frac{1}{6})$

$\{b_n-\frac{1}{6}\}$ は初項 $b_1-\frac{1}{6}=\frac{1}{12}$

公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列より

$b_n-\frac{1}{6}=\frac{1}{12}(-\frac{1}{2})^{n-1}$

$\therefore b_n=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}(\frac{1}{2})^{n-1}$ //

$a_n=f_n=b_{n-1}$

$=\frac{1}{6}+\frac{1}{12}(\frac{1}{2})^{n-2}$ //

$\boxed{82}$ [2007 京都大]

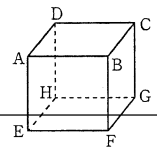
四角形 ABCD を底面とする四角錐 OABCD を考える。点 P は時刻 0 では頂点 O にあり，1 秒ごとに次の規則に従ってこの四角錐の 5 つの頂点のいずれかに移動する。

規則：点 P のあった頂点と 1 つの辺によって結ばれる頂点の 1 つに，等しい確率で移動する。

このとき，n 秒後に点 P が頂点 O にある確率を求めよ。

$\boxed{83}$ [2017 名古屋大]

右図のような立方体を考える。この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する。時刻 0 では点 P は頂点 A にいる。時刻が 1 増えるごとに点 P は，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。例えば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると，時刻 $n+1$ では，それぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で頂点 D，E，G のいずれかにいる。自然数 $n\geqq 1$ に対して，



(i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 B，D，E のいずれかにいる確率を p_n，(ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 C，F，H のいずれかにいる確率を q_n，(iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n，とする。

(1)　p_2，q_2，r_2 と p_3，q_3，r_3 を求めよ。

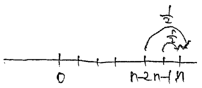
(2)　$n\geqq 2$ のとき，p_n，q_n，r_n を求めよ。

(3)　自然数 $m\geqq 1$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ。

84 [2015 横浜市立大]

数直線上の原点Oを出発点とする。硬貨を投げるたびに，表が出たら2，裏が出たら1だけ正の方向へ進むものとする。点 n に到達する確率を p_n とする。ただし，n は自然数とする。
(1) 3以上の n について，p_n，p_{n-1}，p_{n-2} の関係式を求めよ。
(2) 3以上の n について，p_n を求めよ。

(1) $p_n=\frac{1}{2}p_{n-1}+\frac{1}{2}p_{n-2}$ //



(2) $p_{n+2}-\frac{1}{2}p_{n+1}-\frac{1}{2}p_n=0$, $p_1=\frac{1}{2}$, $p_2=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$

$\frac{1}{2}\times{}^{-1}$
$x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0$
$2x^2-x-1=0$
$(x-1)(2x+1)=0$
∴$x=1,-\frac{1}{2}$

・$p_{n+2}-p_{n+1}=-\frac{1}{2}(p_{n+1}-p_n)$
$\{p_{n+1}-p_n\}$は初項 $p_2-p_1=\frac{1}{4}$
公比 $-\frac{1}{2}$ の等比数列より
$p_{n+1}-p_n=\frac{1}{4}\cdot(-\frac{1}{2})^{n-1}$ …①

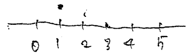
・$p_{n+2}+\frac{1}{2}p_{n+1}=p_{n+1}+\frac{1}{2}p_n$
$\{p_{n+1}+\frac{1}{2}p_n\}$は初項 $p_2+\frac{1}{2}p_1=1$
の定数列より
$p_{n+1}+\frac{1}{2}p_n=1$ …②

②−①より
$\frac{3}{2}p_n=1-\frac{1}{4}(-\frac{1}{2})^{n-1}$
∴$p_n=\frac{2}{3}\{1-\frac{1}{4}(-\frac{1}{2})^{n-1}\}$ //

86 [2018 早稲田大]

点Pは，数直線上の点1から出発し，さいころの出る目が1，2，3，4ならば +1だけ，5，6ならば −1だけ動く。この試行を繰り返し，点Pが点0または点5に到達したときに試行は終了するものとする。点Pが点5に到達して終了する確率を求めよ。

点Pが n ($n=0,1,2,3,4,5$)からスタートして
5に到達して終了する確率を p_n とすると



$p_n=\frac{2}{3}p_{n+1}+\frac{1}{3}p_{n-1}$ ($n=1,2,3,4$)，$p_0=0$，$p_5=1$
$2p_{n+1}-3p_n+p_{n-1}=0$

$\frac{1}{2}\times{}^{-1}_{-1}$
$2x^2-3x+1=0$
$(x-1)(2x-1)=0$
∴$x=1,\frac{1}{2}$

・$p_{n+1}-p_n=\frac{1}{2}(p_n-p_{n-1})=0$
$\{p_{n+1}-p_n\}$は初項 $p_1-p_0=p_1$
公比 $\frac{1}{2}$ の等比数列より
$p_{n+1}-p_n=p_1(\frac{1}{2})^n$ …①

・$p_{n+1}-\frac{1}{2}p_n=p_n-\frac{1}{2}p_{n-1}$
$\{p_{n+1}-\frac{1}{2}p_n\}$は初項 $p_1-\frac{1}{2}p_0=p_1$
の定数列より
$p_{n+1}-\frac{1}{2}p_n=p_1$ …②

②−①より
$\frac{1}{2}p_n=\{1-(\frac{1}{2})^n\}p_1$　　∴$p_n=2\{1-(\frac{1}{2})^n\}p_1$
$p_5=1$より
$\frac{31}{16}=p_1$　　∴$p_1=\frac{16}{31}$ //

87 [1997 慶応義塾大]

太郎君は2円，花子さんは3円持っている．いま，次のようなゲームをする．じゃんけんをし，太郎君が勝ったならば花子さんから1円をもらえ，太郎君が負けたならば花子さんに1円を支払う．ただし，太郎君がじゃんけんに勝つ確率は $\frac{2}{5}$ であり，どちらかの所持金が0となったときにその者が敗者となりゲームは終わる．A_n を太郎君の所持金が n 円となったときからスタートし，花子さんの所持金が0となる確率とすると，

$A_0=0$, $A_5=$ ア $\boxed{}$ である．このとき $A_n=$ イ $\boxed{}\,A_{n+1}+$ ウ $\boxed{}\,A_{n-1}$, $1\leqq n\leqq 4$ が成立する．よって，$A_{n+1}-A_n=$ エ $\boxed{}\,(A_n-A_{n-1})$ である．このことから，$A_5=$ オ $\boxed{}\,A_1$ および $A_2=$ カ $\boxed{}\,A_1$ が得られる．よって，このゲームで太郎君が勝つ確率は キ $\boxed{}$ である．

85 [2015 大阪市立大]

1枚の硬貨を何回も投げ，表が2回続けて出たら終了する試行を行う。ちょうど n 回で終了する確率を P_n とするとき，次の問いに答えよ。
(1) P_2，P_3，P_4 を求めよ。
(2) P_{n+1} を P_n および P_{n-1} を用いて表せ。ただし，$n\geqq 3$ とする。
(3) $n\geqq 2$ のとき，$\frac{P_n}{2}\leqq P_{n+1}\leqq P_n$ が成り立つことを示せ。

88 [1998 信州大]

x 軸上を次の規則で動く点Pがある．
「規則：コインを投げて表が出れば +1，裏が出れば −1だけ動く」
$p_0=1$, $p_{10}=0$ とし，$n=1,2,\cdots\cdots,9$ に対し，Pが $x=n$ から出発したとき，$x=10$ に達する前に，初めて $x=0$ に達する確率を p_n とする．
(1) $n=1,2,\cdots\cdots,9$ に対し，p_{n-1}, p_n, p_{n+1} の間に成り立つ関係式を求めよ．
(2) $q_n=p_n-p_{n-1}$ とおくとき，q_n を p_1 を用いて表せ．
(3) p_n を p_1 と n を用いて表せ．
(4) p_n を求めよ．