

高3数学 発展問題演習 7. 数列

1 [I. 2015 横浜国立大 II. 一橋大]

I. 自然数を2個以上の連続する自然数の和で表すことを考える。例えば、42は $3+4+\cdots+9$ のように2個以上の連続する自然数の和で表せる。

- (1) 2020を2個以上の連続する自然数の和で表す表し方をすべて求めよ。
- (2) a を0以上の整数とすると、 2^a は2個以上の連続する自然数の和で表せないことを示せ。
- (3) a, b を自然数とすると、 $2^a(2b+1)$ は2個以上の連続する自然数の和で表せることを示せ。

II. (1) 1から n までの自然数の総和が偶数になるのは n がどのような数の場合か。

(2) 1から n までの自然数の総和が偶数であるとき、1から n までの自然数を2つの組に分けてそれぞれの組に属する数の総和が等しくなるようにできることを証明せよ。

2 [2009 弘前大]

等比数列 $2, 4, 8, \cdots$ と等比数列 $3, 9, 27, \cdots$ のすべての項を小さい順に並べてできる数列の第1000項は、2つの等比数列のどちらの第何項か。

($\log_6 2 = 0.386852 \cdots$ を使ってよい。)

3 [2004 慶応義塾大]

n を自然数とする。 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ が $(1, 2, \cdots, n)$ の順列全体を動くとき、

$\sum_{k=1}^n kx_k$ の最小値、 $\sum_{k=1}^n kx_k$ の最大値を求めよ。また、 $\sum_{k=1}^n (x_k - k)^2$ の最大値を求めよ。

ただし、 $\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ である。

高3数学 発展問題演習 7. 数列

4 [2010 広島大]

自然数のうち、2 と 8 がどの桁にも現れないものを考え、それらを小さい方から順に並べた数列

1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 30, 31, 33, ……

を $\{a_n\}$ とする。いま、自然数 m に対し、数列 $\{a_n\}$ の中にある m 桁の整数の個数を $f(m)$ とする。例えば $f(1)=7$ である。

(1) $f(2)$, $f(3)$ を求めよ。 (2) 自然数 m に対し、 $f(m)$ を求めよ。

(3) 自然数 m に対し、数列 $\{a_n\}$ の中にある m 桁の整数の逆数の総和は $\frac{f(m)}{10^{m-1}}$ より小さいことを示せ。

(4) すべての自然数 n に対し、 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} < 35$ が成り立つことを示せ。

5 [2021 福島県立医科大]

3 または 4 の倍数である自然数を小さい順に並べた数列を $\{a_i\}$ とする。自然数 n に対して、 $\sum_{i=1}^{6n} a_i$ を n で表せ。

6 [2012 横浜国立大]

(1) k を 0 以上の整数とすると、

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} \leq k$$

を満たす 0 以上の整数 x , y の組 (x, y) の個数を a_k とする。 a_k を k の式で表せ。

(2) n を 0 以上の整数とすると、

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{2} + z \leq n$$

を満たす 0 以上の整数 x , y , z の組 (x, y, z) の個数を b_n とする。 b_n を n の式で表せ。

高3数学 発展問題演習 7. 数列

7 [2016 慶応義塾大]

自然数 n に対して $m \leq \log_2 n < m+1$ を満たす整数 m を a_n で表すことにする。このと

き $a_{2016} = \text{ア}$ である。また、自然数 k に対して $a_n = k$ を満たす n は全部で

イ 個あり、そのような n のうちで最大のものは $n = \text{ウ}$ である。更に、

$\sum_{n=1}^{2016} a_n = \text{エ}$ である。

8 [2018 成蹊大]

正の整数 k に対して、 a_k を $\sqrt{k}$ の整数部分とする。例えば、 $a_2=1$ 、 $a_4=2$ 、 $a_8=2$ である。

- (1) $\sum_{k=1}^{15} a_k$ の値を求めよ。
- (2) m を正の整数とすると、 $a_k = m$ となる k の個数を m を用いて表せ。
- (3) $\sum_{k=1}^{1000} a_k$ の値を求めよ。

9 [一橋大]

すべての正の整数 n に対して、 $5^n + an + b$ が 16 の倍数となるような 16 以下の正の整数 a, b を求めよ。

10 [2017 埼玉大]

- (1) n を自然数とする。三角関数の加法定理を用いて、等式

$$\cos(n+2)\theta + \cos n\theta = 2\cos\theta \cos(n+1)\theta$$

を導け。

- (2) $\cos 2\theta = T_2(\cos \theta)$ 、 $\cos 3\theta = T_3(\cos \theta)$ を満たす整式 $T_2(x)$ 、 $T_3(x)$ をそれぞれ求めよ。
- (3) 自然数 n に対し、 $\cos n\theta = T_n(\cos \theta)$ を満たす整数係数の n 次の整式 $T_n(x)$ が存在することを示せ。
- (4) 自然数 k に対し、 $\cos \frac{\pi}{4k}$ は無理数であることを示せ。ただし、 $\sqrt{2}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい。

11 [横浜国立大]

「 n 個の任意の正の数 $a_1, a_2, \dots, a_n$ について

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

が成り立つ」という命題を $P(n)$ とする.

- (1) $P(2)$ が正しいことを証明せよ.
- (2) $P(k)$ が正しいとき, $P(2k)$ も正しいことを証明せよ.
- (3) $P(k+1)$ が正しいとき, $P(k)$ も正しいことを証明せよ.