

高3数学 発展問題演習 8. 漸化式

1 [1996 名古屋大]

数列 $\{a_n\}$ があって、すべての n について、初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和が

$$\left(a_n + \frac{1}{4}\right)^2 \text{ に等しいとする.}$$

- (1) a_n がすべて正とする. 一般項 a_n を求めよ.
- (2) 最初の 100 項のうち、1 つは負で他はすべて正とする. a_{100} を求めよ.

2 [2020 慶応義塾大]

数列 $\{a_n\}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) は、 $a_1=1$, $a_2=2$ であり、 n が 3 以上の奇数のとき a_{n-2} , a_{n-1} , a_n が等差数列となり、 n が 4 以上の偶数のとき a_{n-2} , a_{n-1} , a_n が等比数列となっている。

- (1) このとき、 $a_3, a_4, \dots, a_8$ は $a_3 = \boxed{}$, $a_4 = \boxed{}$, $a_5 = \boxed{}$,
 $a_6 = \boxed{}$, $a_7 = \boxed{}$, $a_8 = \boxed{}$ である。

- (2) $a_n \geq 100$ となるのは、 $n \geq \boxed{}$ のときである。

- (3) 一般に

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{\boxed{}} (n + \boxed{}) (n + \boxed{}) & (n \text{ は奇数, ただし } \boxed{} \leq \boxed{}) \\ \frac{1}{\boxed{}} (n + \boxed{})^2 & (n \text{ は偶数}) \end{cases}$$

であり、奇数と偶数の場合を合わせると

$$a_n = \frac{1}{\boxed{}} \left\{ \boxed{} n^2 + \boxed{} n + \boxed{} + \left(\boxed{} \right)^n \right\} \text{ となる.}$$

3 [2003 金沢大]

数列 $\{a_n\}$ が $a_1=36$, $a_{n+1}=2a_n+2^{n+3}n-17 \cdot 2^{n+1}$ ($n=1, 2, 3, \dots$) により定められている。

- (1) $b_n = \frac{a_n}{2^n}$ とおくとき、 b_n と b_{n+1} の満たす関係式を導き、 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.
- (2) $a_n > a_{n+1}$ となるような n の値の範囲、および a_n が最小となるような n の値を求めよ.
- (3) $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ とおくとき、 S_n が最小となるような n の値をすべて求めよ.

高3数学 発展問題演習 8. 漸化式

4 [名古屋市立大]

数列 $\{a_n\}$ は、初項が a で、関係式 $a_{n+1} = |a_n - 1| + 2a_n - 5$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を満たしているとする。次の問いに答えよ。

(1) $a < 1$ であるとき、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) $a \geq 3$ であるとき、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $a = \frac{242}{81}$ であるとき、はじめて $a_m < 1$ となる m を求め、数列 $\{a_n\}$ を n の式で表せ。

5 [2011 芝浦工業大]

a_1 を自然数とし、

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2} & (a_n \text{ が偶数のとき}) \\ a_n + 1 & (a_n \text{ が奇数のとき}) \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定まる自然数からなる数列 $\{a_n\}$ を考える。

(1) $a_1 = 5$ のとき、 a_4 , a_7 , a_{10} を求めよ。

(2) $a_n > 2$ のとき $a_{n+2} < a_n$ であることを示せ。

(3) 初項 a_1 の値によらず、数列 $\{a_n\}$ は必ず値が 1 の項をもつことを示せ。

6 [横浜国立大]

数列 $\{a_n\}$ が $a_{n+3} = 10a_{n+2} - 31a_{n+1} + 30a_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) をみたしているとき、

(1) 3 次方程式 $x^3 = 10x^2 - 31x + 30$ は異なる 3 実数解 α, β, γ ($\alpha < \beta < \gamma$) をもつ。 α, β, γ の値を求めよ。

(2) α, β を (1) で求めたものとする。 $b_n = a_{n+1} - \alpha a_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) とおくと、 b_{n+2} を b_{n+1}, b_n の式で表せ。

さらに $c_n = b_{n+1} - b_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) とおくと、 c_{n+1} を c_n の式で表せ。

(3) $a_0 = 1, a_1 = 2, a_2 = 5$ のとき、 c_n, b_n, a_n をそれぞれ n の式で表せ。

7 [東北大]

(1) $x_1 = a$ (実数), $x_{n+1} = \frac{1}{1-x_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定義された数列 $x_1, x_2, x_3, \dots$ がある。

この項のうち、相異なるものはいくつあるか。 a を用いてそれらを表せ。

(2) (1) で求めた解のうちの 2 個が整数となる a の値を求めよ。

高3数学 発展問題演習 8. 漸化式

8 [慶応義塾大]

3 次関数 $f(x)=x^3-2$ を考える. この $f(x)$ を用い, 数列 $\{a_n\}$ を正の実数 a_1 から始めて,

漸化式 $a_{n+1}=a_n-\frac{f(a_n)}{f'(a_n)}$ で定める.

(1) $a_1>\sqrt[3]{2}$ のとき, すべての自然数 n に対して, $\sqrt[3]{2}<a_{n+1}<a_n$ であることを示せ.

(2) $a_1=2$ のとき, $|a_n-\sqrt[3]{2}|<\frac{1}{10}$ となる最小の n の値を求めよ.

9 [2015 信州大]

円 $x^2+(y-1)^2=1$ を C , 円 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ を C_0 とする. C, C_0, x 軸に接する円を C_1 とする. C, C_1, x 軸に接し C_0 と異なる円を C_2 とし, これを繰り返して C, C_n, x 軸に接し C_{n-1} と異なる円を C_{n+1} とする. また, 円 C_n の半径を a_n とする.

(1) a_1 を求めよ.

(2) $b_n=\frac{1}{\sqrt{a_n}}$ とするとき, 数列 $\{b_n\}$ の満たす漸化式を求めよ.

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

10 [東京大]

整数からなる数列 $\{a_n\}$ を漸化式 $a_1=1, a_2=3, a_{n+2}=3a_{n+1}-7a_n (n=1, 2, \dots)$ によって定める.

(1) a_n が偶数になることと, n が 3 の倍数となることは同値であることを示せ.

(2) a_n が 10 の倍数となるための条件を (1) と同様の形式で求めよ.

11 [東京大]

a を正の整数とし, 数列 $\{u_n\}$ を次のように定める.

$$u_1=2, u_2=a^2+2, u_n=au_{n-2}-u_{n-1} (n=3, 4, 5, \dots)$$

このとき, 数列 $\{u_n\}$ の項に 4 の倍数が現れないために, a の満たすべき必要十分条件を求めよ.

12 [2009 京都大]

a と b を互いに素, すなわち 1 以外の公約数をもたない正の整数とし, さらに a は奇数とする。正の整数 n に対して整数 a_n, b_n を $(a + b\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ を満たすように定めるとき, 次の (1), (2) を示せ。ただし $\sqrt{2}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい。

- (1) a_2 は奇数であり, a_2 と b_2 は互いに素である。
- (2) すべての n に対して, a_n は奇数であり, a_n と b_n は互いに素である。