

1.3 部分積分法

(1) 部分積分法

2つの関数の積の導関数については

$$\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

である。すなわち

$$f(x)g'(x) = \{f(x)g(x)\}' - f'(x)g(x)$$

両辺の不定積分を考えると、次の部分積分法の公式が成り立つ。

部分積分法

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

[注] 前節で学んだように、積分には積の積分法はないが、それに近いものが部分積分法である。ただし、すべての関数の積の積分に対して有効であるわけではない。

例1

次の積分を計算せよ。

$$(1) \int_0^1 x e^{2x} dx$$

$$(2) \int x 2^x dx$$

$$(3) \int_0^1 (1-x)e^x dx$$

$$(4) \int x^2 e^x dx$$

解説

$$\begin{aligned} (1) \int_0^1 x e^{2x} dx &= \int_0^1 x \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right)' dx \\ &= \left[x \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right) dx \\ &= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left[\frac{e^{2x}}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{4} (e^2 + 1) \end{aligned}$$

[注] 左辺のままでは積分できない。そこで、右辺に出てくる積分が左辺の積分より簡単になるように $f(x)$, $g(x)$ を定める。 $f(x)$ には微分してより単純な形になる方を選ぶとよい。

$$\begin{aligned}
 (2) \int x 2^x dx &= x \frac{2^x}{\log 2} - \int \frac{2^x}{\log 2} dx \\
 &= \frac{x 2^x}{\log 2} - \frac{2^x}{(\log 2)^2} + C \quad (C \text{ は積分定数})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int_0^1 (1-x)e^x dx &= \left[(1-x)e^x \right]_0^1 - \int_0^1 (-e^x) dx \\
 &= \left[(1-x)e^x + e^x \right]_0^1 = e - 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4) \int x^2 e^x dx &= x^2 e^x - \int 2x e^x dx \\
 &= x^2 e^x - \int 2x e^x dx \\
 &= x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x dx \right) \\
 &= x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C \\
 &= (x^2 - 2x + 2)e^x + C \quad (C \text{ は積分定数})
 \end{aligned}$$

例2

次の積分を計算せよ。

$$\begin{array}{lll}
 (1) \int x \cos x dx & (2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx & (3) \int x \sin x \cos x dx \\
 (4) \int_0^{\pi} x \sin^2 x dx & (5) \int x^2 \sin x dx &
 \end{array}$$

解説

$$\begin{aligned}
 (1) \int x \cos x dx &= x \sin x - \int \sin x dx \\
 &= x \sin x + \cos x + C \quad (C \text{ は積分定数})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2 x} dx &= \left[x \tan x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx \\
 &= \frac{\pi}{4} + \left[\log(\cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \log 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int x \sin x \cos x dx &= \frac{1}{2} \int x \sin 2x dx \\
 &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} x \cos 2x + \frac{1}{2} \int \cos 2x dx \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\sin 2x + C \\
&= -\frac{1}{4}x\cos 2x + \frac{1}{8}\sin 2x + C \quad (C \text{ は積分定数})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4) \int_0^\pi x\sin^2 x dx &= \frac{1}{2} \int_0^\pi x(1 - \cos 2x) dx \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^\pi x dx - \int_0^\pi x\cos 2x dx \right\} \\
&= \frac{\pi^2}{4} - \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{x\sin 2x}{2} \right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{\sin 2x}{2} dx \right\} \\
&= \frac{\pi^2}{4} + \frac{1}{4} \left[\frac{\cos 2x}{2} \right]_0^\pi = \frac{\pi^2}{4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(5) \int x^2\sin x dx &= x^2(-\cos x) - \int 2x(-\cos x) dx \\
&= -x^2\cos x + 2 \int x\cos x dx \\
&= -x^2\cos x + 2 \left(x\sin x - \int \sin x dx \right) \\
&= -x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + C \quad (C \text{ は積分定数})
\end{aligned}$$

例3

次の不定積分を求めよ。

$$(1) \int \log x dx \qquad (2) \int x\log x dx \qquad (3) \int x\log(x^2+1) dx$$

解説

$$\begin{aligned}
(1) \int \log x dx &= \int (x)' \log x dx = x\log x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx \\
&= x\log x - \int dx \\
&= x\log x - x + C \quad (C \text{ は積分定数})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \int x\log x dx &= \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \\
&= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{2} \int x dx \\
&= \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4} + C \quad (C \text{ は積分定数})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3) \int x \log(x^2+1) dx &= \frac{x^2+1}{2} \log(x^2+1) - \int \frac{x^2+1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} dx \\
 &= \frac{x^2+1}{2} \log(x^2+1) - \int x dx \\
 &= \frac{x^2+1}{2} \log(x^2+1) - \frac{x^2}{2} + C \quad (C \text{ は積分定数})
 \end{aligned}$$

$\log x$ の不定積分は公式として記憶しておくといよい。

$\log x$ の不定積分

$$\int \log x dx = x \log x - x + C$$

公式を利用すれば, (3)は

$$\begin{aligned}
 \int x \log(x^2+1) dx &= \frac{1}{2} \int \log(x^2+1) \cdot (x^2+1)' dx \\
 &= \frac{1}{2} \{ (x^2+1) \log(x^2+1) - (x^2+1) \} + C
 \end{aligned}$$

とできる。

例4

m を整数とし, 不定積分 $I = \int x^m \log x dx$ を計算せよ。

解説

C は積分定数とする

$m = -1$ のとき

$$I = \int \frac{\log x}{x} dx = \int (\log x)' \log x dx = \frac{1}{2} (\log x)^2 + C$$

$m \neq -1$ のとき

$$\begin{aligned}
 I &= \int x^m \log x dx \\
 &= \frac{x^{m+1}}{m+1} \log x - \int \frac{x^{m+1}}{m+1} \cdot \frac{1}{x} dx \\
 &= \frac{x^{m+1}}{m+1} \log x - \frac{1}{m+1} \int x^m dx \\
 &= \frac{x^{m+1}}{m+1} \log x - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} + C
 \end{aligned}$$

例5

次の定積分を求めよ.

$$\int_1^e (\log x)^2 dx$$

(解説)

$$\begin{aligned} \int_1^e (\log x)^2 dx &= \left[x(\log x)^2 \right]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{2\log x}{x} dx \\ &= e - 2 \left[x \log x - x \right]_1^e = e - 2 \end{aligned}$$

例6

定数 a が $0 < a < 1$ を満たすとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 不定積分 $\int \log_a x dx$ を求めよ。
- (2) 不定積分 $\int x^2 \log_a x dx$ を求めよ。
- (3) 定積分 $\int_{\frac{1}{2}}^2 |x \log_a x| a^{|\log_a x|} dx$ を求めよ。

(解説)

$$\begin{aligned} (1) \int \log_a x dx &= x \log_a x - \int x \cdot \frac{1}{x \log a} dx \\ &= x \log_a x - \frac{x}{\log a} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \int x^2 \log_a x dx &= \frac{1}{3} x^3 \log_a x - \int \frac{1}{3} x^3 \cdot \frac{1}{x \log a} dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \log_a x - \int \frac{x^2}{3 \log a} dx \\ &= \frac{1}{3} x^3 \log_a x - \frac{x^3}{9 \log a} + C \quad (C \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

- (3) $0 < a < 1$ から, $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ で $\log_a x \geq 0$, $1 \leq x \leq 2$ で $\log_a x \leq 0$ より

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^2 |x \log_a x| a^{|\log_a x|} dx &= \int_{\frac{1}{2}}^1 x(\log_a x) a^{\log_a x} dx - \int_1^2 x(\log_a x) a^{-\log_a x} dx \\ &= \int_{\frac{1}{2}}^1 x(\log_a x) \cdot x dx - \int_1^2 x(\log_a x) \cdot \frac{1}{x} dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\frac{1}{2}}^1 x^2 (\log_a x) dx - \int_1^2 \log_a x dx \\
&= \left[\frac{1}{3} x^3 \log_a x - \frac{x^3}{9 \log a} \right]_{\frac{1}{2}}^1 - \left[x \log_a x - \frac{x}{\log a} \right]_1^2 \\
&= \frac{1}{\log a} \left(\frac{65}{72} - \frac{47}{24} \log 2 \right)
\end{aligned}$$

例7

自然数 n に対して $a_n = \int_2^3 (x-2)(3-x)^n dx$ のとき, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ を求めよ.

解法解説

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_2^3 (x-2)(3-x)^n dx = \int_2^3 (x-2) \left\{ -\frac{(3-x)^{n+1}}{n+1} \right\}' dx \\
&= \left[-(x-2) \frac{(3-x)^{n+1}}{n+1} \right]_2^3 - \int_2^3 -\frac{(3-x)^{n+1}}{n+1} dx \\
&= \frac{1}{n+1} \left[-\frac{(3-x)^{n+2}}{n+2} \right]_2^3 = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\
\sum_{n=1}^{\infty} a_n &= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^m \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{m+2} \right) = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

別解

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_2^3 \{1 - (3-x)\}(3-x)^n dx = \int_2^3 \{(3-x)^n - (3-x)^{n+1}\} dx \\
&= \left[-\frac{1}{n+1} (3-x)^{n+1} + \frac{1}{n+2} (3-x)^{n+2} \right]_2^3 \\
&= -\left(-\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}
\end{aligned}$$

例8

n を自然数として $I_n = \int_a^b (x-a)(x-b)^n dx$, $J_n = \int_a^b (x-a)^2(x-b)^n dx$ とおく。ただし, $a < b$ とする。次の問いに答えよ。

- (1) I_1 と I_n を求めよ。
- (2) 部分積分の公式を用いて, J_n と I_{n+1} の満たす関係式を求めよ。
- (3) J_n を求めよ。

$$(1) I_1 = \int_a^b (x-a)(x-b)dx = -\frac{1}{6}(b-a)^3$$

$$\begin{aligned} I_n &= \int_a^b (x-a)(x-b)^n dx \\ &= \left[\frac{(x-a)(x-b)^{n+1}}{n+1} \right]_a^b - \frac{1}{n+1} \int_a^b (x-b)^{n+1} dx \\ &= \left[-\frac{(x-b)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \right]_a^b = \frac{(a-b)^{n+2}}{(n+1)(n+2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) J_n &= \int_a^b (x-a)^2(x-b)^n dx \\ &= \left[\frac{(x-a)^2(x-b)^{n+1}}{n+1} \right]_a^b - \frac{2}{n+1} \int_a^b (x-a)(x-b)^{n+1} dx \\ &= -\frac{2}{n+1} I_{n+1} \end{aligned}$$

$$(3) J_n = -\frac{2}{n+1} I_{n+1} = -\frac{2(a-b)^{n+3}}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

例9

次の定積分の値を求めよ。

$$\int_0^\pi e^x \sin x dx$$

解説

$$I = \int_0^\pi e^x \sin x dx \text{ とおく}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi e^x \sin x dx = \int_0^\pi e^x (-\cos x)' dx = \left[-e^x \cos x \right]_0^\pi + \int_0^\pi e^x \cos x dx \\ &= e^\pi + 1 + \int_0^\pi e^x (\sin x) dx \\ &= e^\pi + 1 + \left[e^x \sin x \right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \sin x dx = e^\pi + 1 - I \end{aligned}$$

$$\text{よって, } I = \frac{e^\pi + 1}{2}$$

〔別解〕微分を利用

$$(e^x \sin x)' = e^x \sin x + e^x \cos x \cdots \textcircled{1}$$

$$(e^x \cos x)' = -e^x \sin x + e^x \cos x \cdots \textcircled{2}$$

①－②より

$$2e^x \sin x = (e^x \sin x)' - (e^x \cos x)'$$

$$\therefore e^x \sin x = \frac{1}{2} \{ (e^x \sin x)' - (e^x \cos x)' \}$$

よって,

$$\int_0^\pi e^x \sin x dx = \left[\frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) \right]_0^\pi = \frac{e^\pi + 1}{2}$$

例10

自然数 n に対し $I_n = \int_0^{2\pi n} e^{-x} \cos x dx$, $J_n = \int_0^{2\pi n} e^{-x} \sin x dx$ とおく。 I_n と J_n を求め, 更に $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ と $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n$ を求めよ。

〔解説〕

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{2\pi n} e^{-x} \cos x dx = \left[-e^{-x} \cos x \right]_0^{2\pi n} - \int_0^{2\pi n} (-e^{-x})(-\sin x) dx \\ &= -e^{-2\pi n} + 1 - J_n \end{aligned}$$

$$\therefore I_n + J_n = 1 - e^{-2\pi n} \cdots \textcircled{1}$$

$$J_n = \int_0^{2\pi n} e^{-x} \sin x dx = \left[-e^{-x} \sin x \right]_0^{2\pi n} - \int_0^{2\pi n} (-e^{-x}) \cos x dx = I_n$$

$$\therefore J_n = I_n \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$I_n = J_n = \frac{1}{2}(1 - e^{-2\pi n})$$

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} J_n = \frac{1}{2}$$