

高3数学 発展問題演習 演習 6. 三角・指数・対数関数

□1 [2002 横浜国立大]

方程式 $\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin 3x} = 3$ の $0^\circ \leq x \leq 135^\circ$ における解の個数を求めよ.

□2 [2019 京都大]

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。 $\cos \theta$ は有理数ではないが、 $\cos 2\theta$ と $\cos 3\theta$ がともに有理数となるような θ の値を求めよ。ただし、 p が素数のとき、 $\sqrt{p}$ が有理数でないことは証明なしに用いてよい。

□3 [2006 京都大]

$\tan 1^\circ$ は有理数か。

□4 [2003 横浜国立大]

θ_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を $\tan \theta_n = \frac{1}{n}$ ($-90^\circ < \theta_n < 90^\circ$) で定めるとき

- (1) $\tan(\theta_1 + \theta_2)$, $\tan(\theta_1 - \theta_2)$ の値をそれぞれ求めよ.
- (2) $\tan(\theta_n - \theta_{n+1}) = \tan \theta_{111}$ となる n を求めよ.
- (3) $\tan(\theta_2 + \theta_i + \theta_j) = 1$ を満たす組 (i, j) で $i \leq j$ であるものをすべて求めよ.

高3数学 発展問題演習 演習 6. 三角・指数・対数関数

5 [2020 上智大]

n を自然数とする。 x の n 次式 $P_n(x)$ で $\frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta} = P_n(\cos \theta)$ ($0 < \theta < \pi$) であるものを考える。

(1) $P_1(x) = \overset{ア}{\square} x + \overset{イ}{\square}$

$P_2(x) = \overset{ウ}{\square} x^2 + \overset{エ}{\square} x + \overset{オ}{\square}$

$P_3(x) = \overset{カ}{\square} x^3 + \overset{キ}{\square} x^2 + \overset{ク}{\square} x + \overset{ケ}{\square}$

である。

(2) x についての恒等式 $P_{n+1}(x) = \overset{コ}{\square} x P_n(x) + \overset{サ}{\square} P_{n-1}(x)$ ($n \geq 2$) が成り立つ。

(3) $P_4(x)$ の x^4 の項の係数は $\overset{シ}{\square}$ であり、 $P_4(1) = \overset{ス}{\square}$ である。

(4) $P_4(\cos \theta) = 0$ となる最小の θ ($0 < \theta < \pi$) は $\theta = \frac{\overset{セ}{\square}}{\overset{ソ}{\square}} \pi$ である。

(5) $\left(1 - \cos \frac{\pi}{5}\right) \left(1 - \cos \frac{2\pi}{5}\right) \left(1 - \cos \frac{3\pi}{5}\right) \left(1 - \cos \frac{4\pi}{5}\right) = \frac{\overset{タ}{\square}}{\overset{チ}{\square}}$ である。

6 [2008 大阪大]

媒介変数 t によって $x = \cos t$, $y = \cos nt$ ($0 \leq t \leq \pi$) と表される曲線を $y = f_n(x)$ ($-1 \leq x \leq 1$) とする。ただし、 n は自然数である。

(1) $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ を求めよ。

(2) $n \geq 2$ のとき $f_{n+1}(x) = 2x f_n(x) - f_{n-1}(x)$ を示せ。

(3) $\cos \frac{\pi}{4n}$ は無理数であることを示せ。ただし、 $\sqrt{2}$ が無理数であることを証明なしで用いてよい。

高3数学 発展問題演習 演習 6. 三角・指数・対数関数

7 [2013 近畿大]

定義域を $0 \leq x \leq 2\pi$ とする関数 $f(x) = |\sin 2x - 2\sin x - 2\cos x + 1|$ がある。

$t = \sin x + \cos x$ とおき, $f(x)$ を t で表した関数を $g(t)$ とおく。

- (1) 関数 $g(t)$ を求めよ。
- (2) t がとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) $f(x)$ がとりうる値の範囲を求めよ。
- (4) 方程式 $f(x) = k$ の異なる実数解の個数 l を k の値で場合分けして求めよ。

8 [早稲田大]

xy 平面上に 2 つの動点 A, B がある. 動点 A は, 原点 $(0, 0)$ を中心とする半径 1 の円周上を毎秒 a の速さで時計の針と逆回りに動き, 動点 B は, $(1, 0)$ を中心とする半径 2 の円周上を毎秒 $4a$ の速さで時計の針と逆回りに動く. ただし $a > 0$ とする. ある時刻に動点 A は $(1, 0)$, 動点 B は $(3, 0)$ の位置にあった. A, B が最も接近するとき, 最も離れるときの A, B 間の距離を求めよ.

9 [2017 千葉大]

座標平面上に点 A $(-1, 0)$, B $(1, 0)$ がある. 原点を中心とする半径 1 の円から点 A を除いた曲線を C とする. C 上の点 P に対し, A を始点とする半直線 AP 上に点 Q を以下の 2 つの条件 (i), (ii) を満たすようにとる.

(i) 線分 PQ の長さは線分 BP の長さに等しい.

(ii) 点 P は線分 AQ 上にある.

点 P が C 上を動くとき, 点 Q の軌跡を求め, 図示せよ.

10 [2018 東北大]

三角形 ABC の内接円の半径を r , 外接円の半径を R とし, $h = \frac{r}{R}$ とする. また,

$\angle A = 2\alpha$, $\angle B = 2\beta$, $\angle C = 2\gamma$ とおく.

- (1) $h = 4\sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ となることを示せ.
- (2) 三角形 ABC が直角三角形のとき $h \leq \sqrt{2} - 1$ が成り立つことを示せ. また, 等号が成り立つのはどのような場合か.
- (3) 一般の三角形 ABC に対して $h \leq \frac{1}{2}$ が成り立つことを示せ. また, 等号が成り立つのはどのような場合か.

高3数学 発展問題演習 演習 6. 三角・指数・対数関数

11 [京都大]

半径1の円周上に相異なる3点A, B, Cがある.

- (1) $AB^2 + BC^2 + CA^2 > 8$ ならば三角形ABCは鋭角三角形であることを示せ.
- (2) $AB^2 + BC^2 + CA^2 \leq 9$ が成立することを示せ. また, この等号が成立するのはどのような場合か.

12 [I. 名古屋市立大 II. 2014 一橋大]

I. 100^{97} と 99^{100} の大小を調べ, それを証明せよ. ただし, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする.

II. $(2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 \times 13)^{10}$ の10進法での桁数を求めよ.

13 [2010 大阪大]

連立方程式 $\begin{cases} 2^x + 3^y = 43 \\ \log_2 x - \log_3 y = 1 \end{cases}$ を考える.

- (1) この連立方程式を満たす自然数 x, y の組を求めよ.
- (2) この連立方程式を満たす正の実数 x, y は, (1) で求めた自然数の組以外に存在しないことを示せ.

14 [I. 2006 早稲田大 II. 2017 京都大 III. 2024 東京大]

I. 2^{555} は十進法で表すと168桁の数で, その最高位(先頭)の数字は1である.

集合 $\{2^n \mid n \text{ は整数で } 1 \leq n \leq 555\}$ の中に, 十進法で表したとき最高位の数字が4となるものは全部で何個あるか.

II. 次の問いに答えよ. ただし, $0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい.

- (1) 100桁以下の自然数で, 2以外の素因数をもたないものの個数を求めよ.
- (2) 100桁の自然数で, 2と5以外の素因数をもたないものの個数を求めよ.

III. 次の問いに答えよ. 必要ならば, $0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$ であることを用いてよい.

- (1) $5^n > 10^{19}$ となる最小の自然数 n を求めよ.
- (2) $5^m + 4^m > 10^{19}$ となる最小の自然数 m を求めよ.

15 [2024 滋賀医科大]

n, m は 2 以上 100 以下の自然数とする。

- (1) 2^n の一の位が 2 となる n はいくつあるか。
- (2) 6^n の十の位が 3 となる n はいくつあるか。
- (3) $\log_n m$ が有理数となる (n, m) の組はいくつあるか。