高3数学　発展問題演習　14. 積分法

$\boxed{1}$［2006 首都大学東京］

3 次式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ に対し，方程式 $f(x)=0$ は相異なる 3 個の実数解 -1，α，β をもち，$\alpha^2+\beta^2=1$ を満たすとする。

(1)　a，b，c をそれぞれ α と β を用いて表せ。

(2)　c を a を用いて表せ。

(3)　$\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ の値のとりうる範囲を求めよ。

$\boxed{2}$［Ⅰ．関西学院大　Ⅱ．静岡大　Ⅲ．鳥取大］

Ⅰ．関数 $f_n(x)\ (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ を

$$f_1(x)=2x+1\ ,$$

$$f_{n+1}(x)=f_1(x)+\frac{1}{3}\int_0^1 f_n(x)dx\ (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

によって定め，$a_n=\displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx\ (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ とおく．

(1) a_1 の値を求めよ．

(2) a_{n+1} を a_n を用いて表せ．

(3) a_n を n を用いて表せ．

Ⅱ．関数 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots\cdots$ を次のように定める．

$$f_1(x)=2,\ f_{n+1}(x)=2\int_0^1 (3x-t)f_n(t)dt\ (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

このとき，関数 $f_n(x)$ を求めよ．

Ⅲ．以下の式で定義される整式の列 $\{f_n(x)\}\ (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ について，

$$f_1(x)=\frac{1}{2}x+2$$

$$x^2 f_{n+1}(x)=\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2+\int_0^x tf_n(t)dt\ (n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

(1) $f_2(x), f_3(x)$ を求めよ．

(2) 数学的帰納法を用いて，$f_n(x)$ は x の 1 次式であることを示せ．

(3) $f_n(x)$ を求めよ．

$\boxed{3}$ [Ⅰ．1999 横浜市立大　Ⅱ．2002 芝浦工業大]

Ⅰ．$f(x)$ は x の 3 次関数で $f(0)=f(1)=f(a)=0$，$f'(0)=a(1-a)$ を満たしている．ただし，$0<a<1$ とする．$0\leqq x\leqq a$ の範囲で，$y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積を $S(a)$ とするとき

(1)　$S(a)$ を a を用いて表せ．

(2)　$0<a<1$ の範囲で，$S(a)$ が最大になる a の値を求めよ．

Ⅱ．xy 平面上に曲線 $C: y=x^3-x^2$ と直線 $l: y=mx$ がある．

(1)　C と l が $x>0$ の範囲で相異なる 2 つの共有点をもつための m の条件を求めよ．

(2)　(1) の条件のもとで m を変化させるとき，C と l で囲まれる部分の面積の和を最小にする m の値を求めよ．

(3)　(2) における面積の和の最小値を求めよ．

$\boxed{4}$ [Ⅰ．2011 慶応義塾大　Ⅱ．2006 岡山大]

Ⅰ．実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を

$$f(x)=3\int_{x-1}^{x}(t+|t|)(t+|t|-1)dt$$

によって定める。

(1)　$f(x)$ を x の値について場合分けをして，x の多項式で表せ。

(2)　座標平面上に $y=f(x)$ のグラフをかけ。

(3)　x がすべての実数を動くときの $f(x)$ の最小値を求めよ。

Ⅱ．関数 $f(x)$ を $f(x)=\begin{cases}1-|x| & (|x|\leqq 1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$ と定め，$g(x)=\int_0^1 f(t-x)\,dt$ とする。

(1)　$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2)　$g(1)$ の値を求めよ。

(3)　$y=g(x)$ のグラフの概形をかけ。

$\boxed{5}$ [2001 奈良県立医科大]

関数 $f(x)=x(x+1)(x-4)$ を考える．

(1)　実数 k について，方程式 $f(x)=kx$ が (1 つの解 0 の他に) 異符号の 2 つの実数解をもつための条件を求めよ．

(2)　実数 k が (1) の条件を満たしているとする．このとき，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=kx$ は 2 つの領域を囲むが，これらの 2 つの領域の面積が一致することがあるかどうか調べよ．もし，あるとすれば，そのときの k の値を求めよ．

$\boxed{6}$ [Ⅰ. 2013 名城大　Ⅱ. 2016 京都大]

Ⅰ. xy 平面上に，円 K：$x^2+y^2=1$ と放物線 C：$y=x^2-2$ がある。K 上の点 P $(\cos\theta,\ \sin\theta)\,(\pi<\theta<2\pi)$ における K の接線を ℓ とし，ℓ と C で囲まれる部分の面積を S とする。

(1)　ℓ の方程式を θ を用いて表せ。

(2)　S を θ を用いて表せ。

(3)　S の最小値とそのときの P の座標を求めよ。

Ⅱ. xy 平面内の領域 $x^2+y^2\leqq 2$，$|x|\leqq 1$ で，曲線 C：$y=x^3+x^2-x$ の上側にある部分の面積を求めよ。

$\boxed{7}$ [東北大]

単位円上の点 (a, b) から，放物線 $y=x^2$ へ異なる 2 本の接線が引けるとき，この 2 本の接線と $y=x^2$ で囲まれた図形の面積を最大にしたい．このような点 (a, b) を求めよ．

$\boxed{8}$ [Ⅰ. 2003 東京工業大　Ⅱ. 1998 一橋大]

Ⅰ. (1)　3 次関数 $y=-x^3+ax^2+bx\ (a>0)$ のグラフを C とする．原点を通る直線で，C とちょうど 2 点を共有するものを 2 本求めよ．

(2)　(1) で求めた直線のうち，傾きの大きい方を l_1，小さい方を l_2 とする．C と l_1 で囲まれる部分の面積を S_1，C と l_2 で囲まれる部分の面積を S_2 とおく．この 2 つの面積の比 $S_1 : S_2$ を求めよ．

Ⅱ. 曲線 C_1：$y=x^3-x$ を x 軸方向に $a\ (a>0)$ だけ平行移動して得られる曲線を C_2 とする．

(1)　2 曲線 C_1 と C_2 が共有点をもつ a の値の範囲を求めよ．

(2)　(1) のとき，2 曲線 C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積 S を a で表せ．

(3)　面積 S の最大値は $\dfrac{1}{2}$ であることを示せ．

$\boxed{9}$ [2010 広島大]

(1)　関数 $y=-x^4+2x^2$ のグラフの概形をかけ。ただし，グラフの凹凸は調べなくてよい。

(2)　関数 $y=-x^4+2x^2$ のグラフと直線 $y=k$ が 4 点で交わるような実数 k の値の範囲を求めよ。

(3)　(2) のとき，4 つの交点の x 座標を小さい方から順に $-\alpha$，$-\beta$，β，α とする。ただし，$0<\beta<\alpha$ である。このとき，$\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{\alpha+\beta}$ と $\dfrac{\alpha^5+\beta^5}{\alpha+\beta}$ の値をそれぞれ k を用いて表せ。

(4)　関数 $y=-x^4+2x^2$ のグラフと直線 $y=k$ で囲まれる部分は 3 つあり，それらの面積は等しいという。k の値を求めよ。

$\boxed{10}$ [2006 名古屋大]

$0\leqq k\leqq 1$ を満たす実数 k に対して，xy 平面上に次の連立不等式で表される 3 つの領域 D，E，F を考える。

　　D は連立不等式 $y\geqq x^2$，$y\leqq kx$ で表される領域

　　E は連立不等式 $y\leqq x^2$，$y\geqq kx$ で表される領域

　　F は連立不等式 $y\leqq -x^2+2x$，$y\geqq kx$ で表される領域

(1)　領域 $D\cup(E\cap F)$ の面積 $m(k)$ を求めよ。

(2)　(1) で求めた面積 $m(k)$ を最小にする k の値と，その最小値を求めよ。