

3.6 種々の量の計算

(1) 曲線の長さ

曲線の方程式が媒介変数 t を用いて $x=f(t)$, $y=g(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) と表され、 $f(t)$, $g(t)$ の導関数はともに連続であるとき、この曲線の長さ L を定積分で表す。

$A(f(\alpha), g(\alpha))$, $B(f(\beta), g(\beta))$ とし、点 A から点 $P(f(t), g(t))$ までの曲線の長さを、 t の関数と考えて、 $s(t)$ で表します。また、 t の増分を Δt に対する $s(t)$, $f(t)$, $g(t)$ の増分を、それぞれ Δs , Δx , Δy とすると、 $|\Delta t|$ が十分小さいとき

$$|\Delta s| \doteq \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$$

と考えてよい。

点 P が曲線上を A から B に向かって動くとき、 $s(t)$ は単調増加する t の関数で、 Δt と Δs は同符号であるから

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} \doteq \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2}$$

$\Delta t \rightarrow 0$ のとき、両辺の差は 0 に近づくから

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}$$

よって、 $s(t)$ は t の関数 $\sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2}$ の不定積分の 1 つで

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} dt = s(\beta) - s(\alpha)$$

ここで、 $s(\alpha)=0$, $s(\beta)=L$ であるから、次のことが成り立つ。

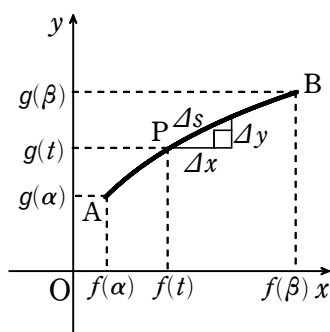
$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} dt$$

以上の結果をまとめると、次のようになる。

媒介変数表示された曲線の長さ

曲線 $x=f(t)$, $y=g(t)$ ($\alpha \leq x \leq \beta$) の長さ L は

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\{f'(t)\}^2 + \{g'(t)\}^2} dt$$



例1

a を正の定数とする．サイクロイド $x=a(\theta-\sin\theta)$, $y=a(1-\cos\theta)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) 上に点 P をとったとき，P における接線が x 軸となす角が $\frac{\pi}{6}$ であつたとする．原点を O とするとき，

(1) 接点 P の座標を求めよ．

(2) サイクロイド上の弧 $\widehat{OP}$ の長さを求めよ．

(解説)

$$(1) \frac{dx}{d\theta} = a(1-\cos\theta), \frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta \text{ より, } \frac{dy}{dx} = \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

P における接線と x 軸のなす角が $\frac{\pi}{6}$ のとき, $\frac{dy}{dx} = \tan \frac{\pi}{6}$ より

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{3}\sin\theta = 1-\cos\theta$$

$$3(1-\cos^2\theta) = (1-\cos\theta)^2, \sin\theta > 0$$

$\cos\theta \neq 1$ より

$$3(1+\cos\theta) = 1-\cos\theta$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}, 0 < \theta < \pi \quad \therefore \theta = \frac{2}{3}\pi$$

よって, $P\left(\frac{2\pi a}{3} - \frac{\sqrt{3}a}{2}, \frac{3a}{2}\right)$

(2) 弧 $\widehat{OP}$ の長さ L は

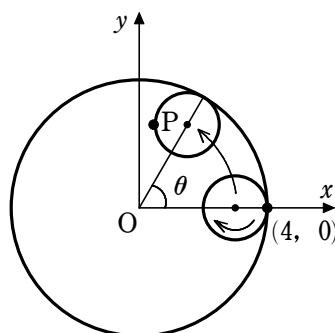
$$L = a \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sqrt{(1-\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} d\theta$$

$$= a \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sqrt{2-2\cos\theta} d\theta = a \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{\theta}{2}} d\theta = 2a \int_0^{\frac{2}{3}\pi} \sin\frac{\theta}{2} d\theta$$

$$= 4a \left[-\cos\frac{\theta}{2} \right]_0^{\frac{2}{3}\pi} = 2a$$

例2

xy 平面の原点 O を中心とする半径 4 の円 E がある。半径 1 の円 C が、内部から E に接しながらすべることなく転がって反時計回りに 1 周する。このとき、円 C の周上に固定された点 P の軌跡を考える。ただし、初めに点 P は点 $(4, 0)$ の位置にあるものとする。



- (1) 図のように、 x 軸と円 C の中心のなす角度が θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) となったときの点 P の座標 (x, y) を、 θ を用いて表せ。
- (2) 点 P の軌跡の長さを求めよ。

解説

- (1) 円 C の中心を O' 、円 C と円 E の接点を Q とおくと、 $\widehat{PQ} = 4\theta$ によって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} = (3\cos\theta, 3\sin\theta) + (\cos(\theta - 4\theta), \sin(\theta - 4\theta)) \\ &= (3\cos\theta + \cos 3\theta, 3\sin\theta - \sin 3\theta) \\ \therefore P(3\cos\theta + \cos 3\theta, 3\sin\theta - \sin 3\theta)\end{aligned}$$

- (2) $x = 3\cos\theta + \cos 3\theta$, $y = 3\sin\theta - \sin 3\theta$ とすると

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\theta} &= -3(\sin\theta + \sin 3\theta), \quad \frac{dy}{d\theta} = 3(\cos\theta - \cos 3\theta) \\ \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= 9\{(\sin\theta + \sin 3\theta)^2 + (\cos\theta - \cos 3\theta)^2\} \\ &= 9\{2(1 + \sin 3\theta \sin\theta - \cos 3\theta \cos\theta)\} \\ &= 18(1 - \cos 4\theta) = 36\sin^2 2\theta\end{aligned}$$

よって、点 P の軌跡の長さ L は

$$\begin{aligned}L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{36\sin^2 2\theta} d\theta = 6 \int_0^{2\pi} |\sin 2\theta| d\theta = 24 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta d\theta \\ &= 24 \left[-\frac{1}{2} \cos 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 24\end{aligned}$$

例3

O を原点とする座標平面において、点 A の座標を (2, 0) とする。線分 OA を直径とする円周上の点 T における接線に O から下ろした垂線を OP とする。T が円周上を動くとき、P が描く曲線の長さを求めよ。

解説

B(1, 0) とし、B から直線 OP に下ろした垂線を BH とする

$\angle ABT = \theta$ とすると、

$$\angle AOP = \theta, \quad OH = \cos \theta, \quad PH = 1$$

P(x, y) とおくと

$$x = (1 + \cos \theta) \cos \theta, \quad y = (1 + \cos \theta) \sin \theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = (-\sin \theta) \cos \theta + (1 + \cos \theta)(-\sin \theta)$$

$$= -\sin \theta - 2\sin \theta \cos \theta = -\sin \theta - \sin 2\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = (-\sin \theta) \sin \theta + (1 + \cos \theta) \cos \theta$$

$$= -\sin^2 \theta + \cos \theta + \cos^2 \theta = \cos \theta + \cos 2\theta$$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = 1 + 1 + 2(\cos 2\theta \cos \theta + \sin 2\theta \sin \theta)$$

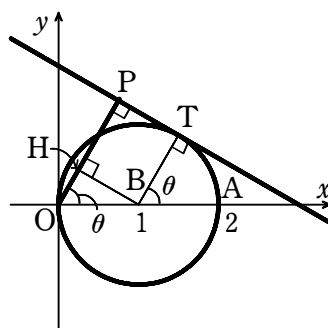
$$= 2 + 2\cos \theta = 4\cos^2 \frac{\theta}{2}$$

求める曲線の長さ L は

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^{2\pi} 2 \left| \cos \frac{\theta}{2} \right| d\theta$$

$$= 2 \int_0^{\pi} 2 \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 4 \int_0^{\pi} \cos \frac{\theta}{2} d\theta$$

$$= 4 \left[2 \sin \frac{\theta}{2} \right]_0^{\pi} = 8 \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \right) = 8$$



例4

極方程式 $r = 1 + \cos \theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$) で表される曲線の長さを求めよ。

(解説)

$$x = r \cos \theta = (1 + \cos \theta) \cos \theta = \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$y = r \sin \theta = (1 + \cos \theta) \sin \theta = \sin \theta + \frac{1}{2} \sin 2\theta$$

よって

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta - 2\cos \theta \sin \theta = -\sin \theta - \sin 2\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos \theta + \cos 2\theta$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= (-\sin \theta - \sin 2\theta)^2 + (\cos \theta + \cos 2\theta)^2 \\ &= 2 + 2\sin \theta \sin 2\theta + 2\cos \theta \cos 2\theta = 2 + 2\cos \theta \\ &= 2 + 2\left(2\cos^2 \frac{\theta}{2} - 1\right) = 4\cos^2 \frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

$0 \leq \theta \leq \pi$ のとき $\cos \frac{\theta}{2} \geq 0$ であるから、求める曲線の長さ L は

$$\begin{aligned} L &= \int_0^\pi \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta \\ &= \int_0^\pi \sqrt{4\cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = 2 \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta \\ &= 4 \left[\sin \frac{\theta}{2} \right]_0^\pi = 4 \end{aligned}$$

曲線の方程式が $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) の形で与えられている場合は

$$x = t, y = f(t) \quad (a \leq x \leq b)$$

と考えると

$$\frac{dx}{dt} = 1, \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} = f'(x)$$

である。よって、この曲線の長さ L は次のようになる。

曲線 $y=f(x)$ の長さ

曲線 $y=f(x)$ ($a \leq x \leq b$) の長さ L は

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \{f'(x)\}^2} dx$$

例5

曲線 $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ ($0 \leq x \leq 1$) の長さを求めよ。

解説

$$y' = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$\begin{aligned} 1 + y'^2 &= 1 + \frac{(e^x - e^{-x})^2}{4} \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{(e^x + e^{-x})^2}{4} \end{aligned}$$

よって、曲線の長さ L は

$$\begin{aligned} L &= \int_0^1 \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_0^1 \frac{e^x + e^{-x}}{2} dx \\ &= \left[\frac{e^x - e^{-x}}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \left(e - \frac{1}{e} \right) \end{aligned}$$

注 曲線 $y = \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{2a}$ ($a > 0$) をカタナリー (懸垂線) という。

(2) 直線上を運動する点の道のり

数直線上を運動する点 P の時刻 t における座標を $x = F(t)$, 速度を $v = f(t)$ とすると, 速度の定義により

$$F'(t) = f(t) \text{ すなわち } F(t) = \int f(t) dt$$

$t = a$ から $t = b$ までの点 P の位置の変化量は $F(b) - F(a)$ であり, $F(t)$ は $f(t)$ の不定積分であるから

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt$$

となります。これより

$$F(b) = F(a) + \int_a^b f(t) dt$$

また, $t = a$ から $t = b$ までの点 P の道のりは $|f(t)|$ の定積分 $\int_a^b |f(t)| dt$ で表されます。位置の変化量 $F(b) - F(a)$ と道のりが一致するのは, 常に $f(t) \geq 0$ である場合に限られる。

以上のことをまとめると, 次のようになる。

速度と位置

数直線上を運動する点 P の速度を $v = f(t)$ とし, $t = a$ のときの P の座標を k とする。

1. $t = b$ における P の座標 x は, $x = k + \int_a^b f(t) dt$

2. $t = a$ から $t = b$ までの P の位置の変化量 s は, $s = \int_a^b f(t) dt$

3. $t = a$ から $t = b$ までの P の道のり l は, $l = \int_a^b |f(t)| dt$

例6

現在時刻を $t=0$ として、点 P が速度 $v(t) = t^2 - 10t + 16$ (cm/秒) で直線上を動くとき

(1) t 秒後の位置 $S(t)$ は $S(t) = \overset{\text{ア}}{\boxed{}} \text{ (cm)}$ と表される。ただし、 $S(0) = 0$ とする。

(2) 点 P が初めて向きを変える時刻は $\overset{\text{イ}}{\boxed{}} \text{ 秒後}$ である。

(3) $2 \leq t \leq 9$ での最大の速さは $\overset{\text{ウ}}{\boxed{}} \text{ 秒後の } \overset{\text{エ}}{\boxed{}} \text{ (cm/秒)}$ である。

(4) 点 Q が速度 $v(t) = -t^2 - 2t + 10$ (cm/秒) で同一直線上を動くとする。 t 秒後の点 Q の位置 $T(t)$ は、 $T(0) = 3$ として $T(t) = \overset{\text{オ}}{\boxed{}} \text{ (cm)}$

と表される。このとき、 $0 \leq t \leq 5$ の範囲で点 P, Q は $\overset{\text{カ}}{\boxed{}} \text{ 回}$ 重なる。

解説

$$(1) S(t) = \int v(t) dt = \int (t^2 - 10t + 16) dt$$

$$= \frac{1}{3}t^3 - 5t^2 + 16t + C \text{ (} C \text{ は積分定数)}$$

$$S(0) = 0 \text{ より, } C = 0$$

$$\text{よって, } S(t) = \overset{\text{ア}}{\frac{1}{3}t^3 - 5t^2 + 16t}$$

$$(2) v(t) = (t-2)(t-8)$$

$$v(t) = 0 \text{ とすると, } t = 2, 8$$

$$0 < t < 2 \text{ のとき } v(t) > 0,$$

$$2 < t < 8 \text{ のとき } v(t) < 0,$$

$$8 < t \text{ のとき } v(t) > 0 \text{ より}$$

初めて向きを変える時刻は $\overset{\text{イ}}{2} \text{ 秒後}$

$$(3) v(t) = (t-5)^2 - 9$$

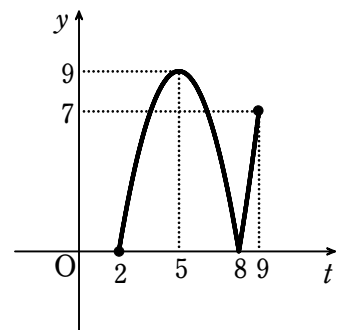
$y = |v(t)|$ のグラフは右図

よって、最大の速さは

$\overset{\text{ウ}}{5} \text{ 秒後の } \overset{\text{エ}}{9} \text{ (cm/秒)}$ である。

$$(4) T(t) = \int (-t^2 - 2t + 10) dt$$

$$= -\frac{1}{3}t^3 - t^2 + 10t + C \text{ (} C \text{ は積分定数)}$$



$$T(0)=3 \text{ より, } C=3$$

$$\text{よって, } T(t) = -\frac{1}{3}t^3 - t^2 + 10t + 3$$

点 P, Q が重なる回数は, $S(t) = T(t)$ ($0 \leq t \leq 5$) の解の個数と等しい
 $U(t) = S(t) - T(t)$ とおくと

$$U(t) = \frac{1}{3}t^3 - 5t^2 + 16t - \left(-\frac{1}{3}t^3 - t^2 + 10t + 3\right) = \frac{2}{3}t^3 - 4t^2 + 6t - 3$$

$$U'(t) = 2t^2 - 8t + 6 = 2(t-1)(t-3)$$

$U(t)$ の増減表は下図

t	0	...	1	...	3	...	5
$U'(t)$		+	0	-	0	+	
$U(t)$	-3	↗	$-\frac{1}{3}$	↘	-3	↗	$\frac{31}{3}$

$U(t) = 0$ の解は 1 個より, $^{\text{カ}}$ 1 回

例7

数直線上を動く点 P の座標 x が, 時刻 t の関数として, $x = t^3 - 9t^2 + 15t$ と表されるとき, 次の問いに答えよ。

(1) 点 P の速さが 0 になる時刻をすべて求めると, $t = \text{ア}$ である。

(2) $t = 0$ から $t = 10$ までに点 P が動く道のりは $^{\text{イ}}$ である。

(解説説)

$$(1) \frac{dx}{dt} = 3t^2 - 18t + 15 = 3(t-1)(t-5) \dots \text{①}$$

速さが 0 になる時刻は, $t = \text{ア}$ 1, 5

(2) ①より, 点 P の速度 v は

$t \leq 1$ のとき $v \geq 0$, $1 \leq t \leq 5$ のとき $v \leq 0$, $5 \leq t$ のとき $v \geq 0$ より

$t = 0$ から $t = 10$ までに点 P が動く道のりは

$$\begin{aligned} \int_0^{10} |v| dt &= \int_0^1 v dt + \int_1^5 (-v) dt + \int_5^{10} v dt \\ &= \left[t^3 - 9t^2 + 15t \right]_0^1 - \left[t^3 - 9t^2 + 15t \right]_1^5 + \left[t^3 - 9t^2 + 15t \right]_5^{10} \\ &= \text{イ} 314 \end{aligned}$$

(3) 平面上を運動する点の道のり

座標平面上で、点 $P(x, y)$ が曲線 C 上を動き、 x, y が時刻 t の関数として、次のように表されるとする。

$$x = f(t), y = g(t)$$

時刻 $t = \alpha, t = \beta$ に対する点 P の位置を、それぞれ A, B とし、点 P が $\alpha \leq t \leq \beta$ の間に、曲線 C 上を点 A から点 B に向かって動くときの P の道のり l は A から B までの曲線 C の長さに等しい。よって、曲線の長さの公式より

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

このとき、 $|\vec{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$ であるから、道のり l は、次の式で表される。

平面上の道のり

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} |\vec{v}| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

例8

$a > 0$ を定数として、座標平面上で、式 $x(t) = e^{at} \cos t$, $y(t) = e^{at} \sin t$ ($-\infty < t < \infty$) で定まる曲線を C_a とする。

(1) 位置ベクトル $(x(t), y(t))$ と速度ベクトル $(x'(t), y'(t))$ のなす角 θ は時刻 t によらず一定であることを示し、 θ と a の関係を求めよ。

(2) $\theta = \frac{\pi}{3}$ となる a に対し、曲線 C_a の $0 \leq t \leq 2\pi$ に対応する部分の長さを求めよ。

解説

(1) $x(t) = e^{at} \cos t$, $y(t) = e^{at} \sin t$ より

$$\{x(t)\}^2 + \{y(t)\}^2 = e^{2at}$$

$$x'(t) = e^{at}(a \cos t - \sin t), y'(t) = e^{at}(a \sin t + \cos t)$$

$$\begin{aligned} \{x'(t)\}^2 + \{y'(t)\}^2 &= e^{2at}\{(a \cos t - \sin t)^2 + (a \sin t + \cos t)^2\} \\ &= e^{2at}(a^2 + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x(t)x'(t) + y(t)y'(t) &= e^{2at}\{\cos t(a \cos t - \sin t) + \sin t(a \sin t + \cos t)\} \\ &= a e^{2at} \end{aligned}$$

$\overrightarrow{u(t)} = (x(t), y(t))$, $\overrightarrow{v(t)} = (x'(t), y'(t))$ とおくと

$$|\overrightarrow{u(t)}| = e^{at}, \quad |\overrightarrow{v(t)}| = e^{at}\sqrt{a^2+1}, \quad \overrightarrow{u(t)} \cdot \overrightarrow{v(t)} = ae^{2at}$$

よって

$$\cos \theta = \frac{\overrightarrow{u(t)} \cdot \overrightarrow{v(t)}}{|\overrightarrow{u(t)}||\overrightarrow{v(t)}|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} \dots \textcircled{1}$$

$$a > 0 \text{ より, } 0 < \frac{a}{\sqrt{a^2+1}} < 1$$

よって, ①式を満たす θ が $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ の範囲に 1 つ存在して,

これは t によらず一定である

$$(2) \theta = \frac{\pi}{3} \text{ のとき, } \cos \theta = \frac{1}{2} \text{ より}$$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{1}{2}$$

$$3a^2 = 1$$

$$a > 0 \text{ より, } a = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

曲線 C_a の $0 \leq t \leq 2\pi$ に対応する部分の長さ l は

$$\begin{aligned} l &= \int_0^{2\pi} |\overrightarrow{v(t)}| dt = \sqrt{a^2+1} \int_0^{2\pi} e^{at} dt \\ &= \frac{\sqrt{a^2+1}}{a} \left[e^{at} \right]_0^{2\pi} = \frac{\sqrt{a^2+1}}{a} (a^{2\pi a} - 1) = 2 \left(e^{\frac{2}{\sqrt{3}}\pi} - 1 \right) \end{aligned}$$

(4) 水の問題

例9

xy 平面を水平にとり, xz 平面において関数 $z=f(x)$ を

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (0 \leq x \leq 1) \\ x^2 - 1 & (1 \leq x \leq 3) \end{cases}$$

で定義する。曲線 $z=f(x)$ を z 軸の周りに回転してできる容器について考える。ただし, この容器に関する長さの単位は cm である。この容器に毎秒 $\pi \text{ cm}^3$ の割合で水を注ぐとき, 次の問いに答えよ。

(1) 注水し始めてからこの容器がいっぱいになるまでの時間は ア 秒である。

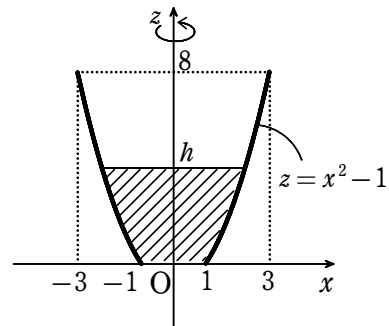
(2) 注水し始めてから 4 秒後の水面が上昇する速さは イ cm/秒である。

(3) 注水し始めてから 4 秒後の水面の半径が増大する速さは ウ cm/秒である。

(解説)

底面から水面までの高さが h cm のときの水の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^h x^2 dz \\ &= \pi \int_0^h (z+1) dz \\ &= \pi \left[\frac{1}{2} z^2 + z \right]_0^h \\ &= \left(\frac{1}{2} h^2 + h \right) \pi \end{aligned}$$



よって, 水を注水し始めてから, t 秒後の底面から水面までの高さが h cm であったとすると

$$\begin{aligned} \pi t &= \left(\frac{1}{2} h^2 + h \right) \pi \\ \therefore t &= \frac{1}{2} h^2 + h \cdots \text{①} \end{aligned}$$

(1) 容器がいっぱいになるのは $h=8$ のときより

$$t = \frac{1}{2} \cdot 8^2 + 8 = 40$$

よって、注水し始めてからこの容器がいっぱいになるまでの時間は
740 (秒)

(2) ①において、 $t=4$ とすると

$$4 = \frac{1}{2}h^2 + h$$

$$h^2 + 2h - 8 = 0$$

$$(h+4)(h-2) = 0$$

$0 < h < 8$ より、 $h=2$

①の両辺を h で微分すると $\frac{dt}{dh} = h+1$ より

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{\frac{dt}{dh}} = \frac{1}{h+1}$$

よって、求める速さは

$$\frac{1}{2+1} = \frac{1}{3} \text{ (cm/秒)}$$

(3) 水を注水し始めてから t 秒後の水面の半径を r とすると

$$h = r^2 - 1 \quad \dots\dots \textcircled{2}$$

(2)から、 $t=4$ のとき $h=2$ より

$$2 = r^2 - 1$$

$r > 0$ より、 $r = \sqrt{3}$

②の両辺を t で微分すると $\frac{dh}{dt} = 2r \cdot \frac{dr}{dt}$ より

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{2r} \cdot \frac{dh}{dt}$$

$t=4$ のとき $\frac{dh}{dt} = \frac{1}{3}$ より、求める速さは

$$\frac{1}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\sqrt{3}}{18} \text{ (cm/秒)}$$

補1

(1) $x \geq 0$ で定義された関数

$$f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$$

について、導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) 極方程式 $r = \theta$ ($\theta \geq 0$) で定義される曲線の、 $0 \leq \theta \leq \pi$ の部分の長さを求めよ。

解説

$$(1) f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(2) 極方程式 $r = \theta$ ($\theta \geq 0$) より

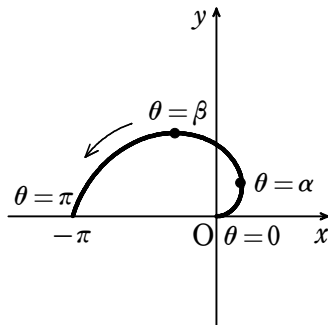
$$x = r \cos \theta = \theta \cos \theta, \quad y = r \sin \theta = \theta \sin \theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = \cos \theta - \theta \sin \theta = -\sin \theta \left(\theta - \frac{1}{\tan \theta} \right)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \sin \theta + \theta \cos \theta = \cos \theta (\theta + \tan \theta)$$

よって、 θ についての x, y の増減表は下図

θ	0	...	α	...	$\left(\frac{\pi}{2}\right)$	...	β	...	π
x'		+	0	-	-	-	-	-	
y'		+	+	+	+	+	0	-	
x		↗	極大	↘	↘	↘	↘	↘	
y		↗	↗	↗	↗	↗	極大	↘	



ただし

$$\cos \alpha - \alpha \sin \alpha = 0$$

$$\sin \beta + \beta \cos \beta = 0$$

よって、曲線は右図のようになる

したがって、曲線 $r = \theta$ の $0 \leq \theta \leq \pi$ の部分の長さを L とすると

$$L = \int_0^{\pi} \sqrt{(\cos \theta - \theta \sin \theta)^2 + (\sin \theta + \theta \cos \theta)^2} d\theta$$

$$= \int_0^{\pi} \sqrt{1 + \theta^2} d\theta$$

$$= \left[\theta \sqrt{1 + \theta^2} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\theta^2}{\sqrt{1 + \theta^2}} d\theta$$

$$= \pi\sqrt{1+\pi^2} - \int_0^\pi \frac{1+\theta^2-1}{\sqrt{1+\theta^2}} d\theta$$

$$= \pi\sqrt{1+\pi^2} - L + \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}$$

よって

$$2L = \pi\sqrt{1+\pi^2} + \int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{1+\theta^2}}$$

(1) より

$$2L = \pi\sqrt{1+\pi^2} + \left[\log(\theta + \sqrt{1+\theta^2}) \right]_0^\pi$$

$$= \pi\sqrt{1+\pi^2} + \log(\pi + \sqrt{1+\pi^2})$$

$$\therefore L = \frac{\pi\sqrt{1+\pi^2} + \log(\pi + \sqrt{1+\pi^2})}{2}$$

補2

(1) $\int \sqrt{1+kx} dx = \overset{\text{ア}}{\boxed{}} + C$ である。ただし、 k は 0 でない定数であり、 C は積分定数である。

(2) 曲線 $y = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}}$ ($0 \leq x \leq 1$) の長さを求めよ。

(3) $x\sqrt{x^2+1} + \log(x + \sqrt{x^2+1})$ の導関数を $a\sqrt{f(x)}$ とする。ここで、 a は定数で、 $f(x)$ は最高次の係数が 1 である整式とする。このとき、
 $a = \overset{\text{イ}}{\boxed{}}$, $f(x) = \overset{\text{ウ}}{\boxed{}}$ である。

(4) 曲線 $y = x^2$ ($0 \leq x \leq 1$) の長さを求めよ。

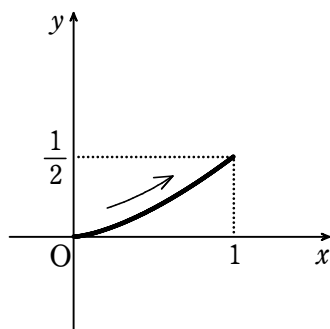
(解説)

$$(1) \int \sqrt{1+kx} dx = \frac{2}{3k}(1+kx)^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3k}(1+kx)\sqrt{1+kx} + C$$

$$(2) y = \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} \text{ より } y' = \frac{3}{4}x^{\frac{1}{2}} > 0$$

求める長さを L_1 とすると

$$\begin{aligned} L_1 &= \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{4}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{16}x} dx \\ &= \left[\frac{2}{3 \times \frac{9}{16}} \left(1 + \frac{9}{16}x\right) \sqrt{1 + \frac{9}{16}x} \right]_0^1 = \frac{61}{54} \end{aligned}$$



$$(3) \{x\sqrt{x^2+1} + \log(x + \sqrt{x^2+1})\}'$$

$$\begin{aligned} &= \sqrt{x^2+1} + x \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} + \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} \\ &= \sqrt{x^2+1} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \\ &= 2\sqrt{x^2+1} \end{aligned}$$

よって, $a=2$, $f(x) = x^2+1$

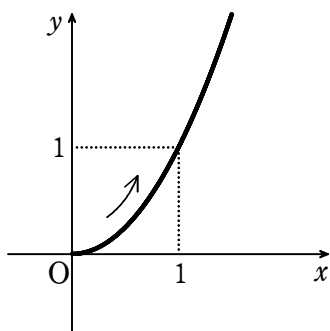
$$(4) y = x^2 \text{ から, } 0 < x < 1 \text{ で } y' = 2x > 0$$

求める長さを L_2 とすると

$$L_2 = \int_0^1 \sqrt{1 + 4x^2} dx$$

ここで, $2x = u$ とおくと

$$\begin{aligned} L_2 &= \int_0^2 \sqrt{1 + u^2} \times \frac{1}{2} du = \frac{1}{4} \int_0^2 2\sqrt{u^2+1} du \\ &= \frac{1}{4} \left[u\sqrt{u^2+1} + \log(u + \sqrt{u^2+1}) \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{4} \{2\sqrt{5} + \log(2 + \sqrt{5})\} \end{aligned}$$



補3

曲線 $y = x^2$ ($0 \leq x \leq 1$) を y 軸の周りに回転してできる形の容器に水を満たす．この容器の底に排水口がある．時刻 $t=0$ に排水口を開けて排水を開始する．時刻 t において容器に残っている水の深さを h ，体積を V とする． V の変化率 $\frac{dV}{dt}$ は $\frac{dV}{dt} = -\sqrt{h}$ で与えられる．

- (1) 水深 h の変化率 $\frac{dh}{dt}$ を h を用いて表せ．
- (2) 容器内の水を完全に排水するのにかかる時間 T を求めよ．

解説

- (1) 水の深さが h であるときの水の体積を $V(h)$ とすると

$$V(h) = \pi \int_0^h x^2 dy = \pi \int_0^h y dy$$

$$\frac{dV}{dh} = \pi h$$

よって

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dh} \cdot \frac{dh}{dt} = \pi h \frac{dh}{dt}$$

題意から， $\pi h \frac{dh}{dt} = -\sqrt{h}$ より

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{\pi\sqrt{h}}$$

- (2) $\frac{dt}{dh} = -\pi\sqrt{h}$ より

$$T = \int_1^0 (-\pi\sqrt{h}) dh = \pi \int_0^1 \sqrt{h} dh = \pi \left[\frac{2}{3} h^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3} \pi$$