

① [2009 名古屋市立大]

xyz 空間内の 2 点 $P(0, -1, 1)$ と $Q(1, 0, -1)$ を通る直線を ℓ とし、直線 ℓ を z 軸の周りに 1 回転してできる曲面と 2 つの平面 $z=1$ および $z=-1$ で囲まれた立体を A とする。次の問いに答えよ。

- (1) 立体 A を平面 $z=0$ で切った断面 B の面積 S_1 を求めよ。
- (2) 立体 A の体積 V を求めよ。
- (3) 立体 A を平面 $z=x$ で切った断面 C の面積 S_2 を求めよ。

② [2023 早稲田大]

xyz 空間において、3 点 $A(2, 1, 2)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, -3, 0)$ を頂点とする三角形 ABC を考える。

- (1) $\angle BAC$ を求めよ。
- (2) $0 \leq h \leq 2$ に対し、線分 AB , AC と平面 $x=h$ との交点をそれぞれ P , Q とする。点 P , Q の座標を求めよ。
- (3) $0 \leq h \leq 2$ に対し、点 $(h, 0, 0)$ と線分 PQ の距離を h で表せ。ただし、点と線分の距離とは、点と線分上の点の距離の最小値である。
- (4) 三角形 ABC を x 軸の周りに 1 回転させ、そのときに三角形が通過する点全体からなる立体の体積を求めよ。

③ [2011 名古屋大]

$-\frac{1}{4} < s < \frac{1}{3}$ とする。 xyz 空間内の平面 $z=0$ の上に長方形

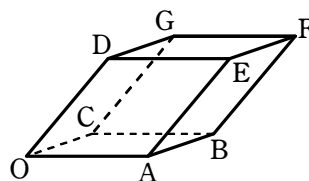
$$R_s = \{(x, y, 0) \mid 1 \leq x \leq 2+4s, 1 \leq y \leq 2-3s\}$$

がある。長方形 R_s を x 軸の周りに 1 回転してできる立体を K_s とする。

- (1) 立体 K_s の体積 $V(s)$ が最大となるときの s の値、およびそのときの $V(s)$ の値を求めよ。
- (2) s を (1) で求めた値とする。このときの立体 K_s を y 軸の周りに 1 回転してできる立体 L の体積を求めよ。

4 [2022 明治大]

右の図のような6つの平行四辺形で囲まれた平行六面体 $OABC-DEFG$ において、すべての辺の長さは1であり、 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ のどの2つのなす角も $\frac{\pi}{3}$ であるとする。



- (1) $\overrightarrow{OF}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OD}$ を用いて表すと、 $\overrightarrow{OF} = \text{ア}$ である。
- (2) $|\overrightarrow{OF}|$, $\cos \angle AOF$ を求めると、 $|\overrightarrow{OF}| = \text{イ}$, $\cos \angle AOF = \text{ウ}$ となる。
- (3) 三角形 ACD を底面とする三角錐 $OACD$ を、直線 OF の周りに1回転してできる円錐の体積は エ である。
- (4) 対角線 OF 上に点 P をとり、 $|\overrightarrow{OP}| = t$ とおく。点 P を通り、 $\overrightarrow{OF}$ に垂直な平面を H とする。平行六面体 $OABC-DEFG$ を平面 H で切ったときの断面が六角形となるような t の範囲は オ である。このとき、平面 H と辺 AE の交点を点 Q として、 $|\overrightarrow{AQ}|$ を t の式で表すと $|\overrightarrow{AQ}| = \text{カ}$ である。

また、 $|\overrightarrow{PQ}|^2$ を t の式で表すと

$$|\overrightarrow{PQ}|^2 = |\overrightarrow{OQ}|^2 - |\overrightarrow{OP}|^2 = \text{キ}$$

である。

- (5) 平行六面体 $OABC-DEFG$ を、直線 OF の周りに1回転してできる回転体の体積は ク である。

5 [2008 東京大]

- (1) 正八面体の1つの面を下にして水平な台の上に置く。この八面体を真上から見た図(平面図)をかけ。
- (2) 正八面体の互いに平行な2つの面をとり、それぞれの面の重心を G_1 , G_2 とする。 G_1 , G_2 を通る直線を軸としてこの八面体を1回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし八面体は内部も含むものとし、各辺の長さは1とする。

6 [2016 早稲田大]

xyz 空間上に点 $A(0, 0, \sqrt{3})$ をとる。 xy 平面上の点 $P(a, b, 0)$ は、線分 AP の長さが 2 で、 $a \geq 0, b \geq 0$ となるように動く。このとき線分 AP がえがく図形を F とする。

- (1) 点 P の軌跡を xy 平面上に図示せよ。
- (2) 点 $Q(x, y, z)$ を図形 F 上の点とすると、 z を x, y を用いて表せ。
- (3) 図形 F , 座標平面 $x=0, y=0, z=0$ によって囲まれる部分を x 軸の周りに 1 回転してできる回転体を V とする。 V の平面 $x=t$ による切り口の面積 $S(t)$ を、 t を用いて表せ。
- (4) V の体積を求めよ。

7 [I. 2005 名古屋市立大 II. 2011 熊本大]

原点を O とする xyz 空間に 2 点 $P(\cos \pi t, \sin \pi t, t), Q(\cos \pi t, \sin \pi t, 0)$ をとる。 $0 \leq t \leq 1$ のとき

- (1) $t = \frac{k}{n}$ (ただし k, n は自然数, $k \leq n$) とする。 $\triangle OPQ$ を z 軸の周りに $\frac{\pi}{n}$ だけ回転させてできる立体の体積を求めよ。
- (2) t が 0 から 1 まで動くとき、 $\triangle OPQ$ が通過する部分の体積を求めよ。

II. xyz 空間内の 3 点 $P(0, 0, 1), Q(0, 0, -1), R(t, t^2 - t + 1, 0)$ を考える。 t が $0 \leq t \leq 2$ の範囲を動くとき、三角形 PQR が通過してできる立体を K とする。

- (1) K を xy 平面で切ったときの断面積を求めよ。
- (2) K の体積を求めよ。

8 [2009 筑波大]

xyz 空間内において、 yz 平面上で放物線 $z = y^2$ と直線 $z = 4$ で囲まれる平面図形を D とする。点 $(1, 1, 0)$ を通り z 軸に平行な直線を ℓ とし、 ℓ の周りに D を 1 回転させてできる立体を E とする。

- (1) D と平面 $z=t$ との交わりを D_t とする。ただし $0 \leq t \leq 4$ とする。点 P が D_t 上を動くとき、点 P と点 $(1, 1, t)$ との距離の最大値、最小値を求めよ。
- (2) 平面 $z=t$ による E の切り口の面積 $S(t)$ ($0 \leq t \leq 4$) を求めよ。
- (3) E の体積 V を求めよ。

高3理系数学 発展問題演習 演習 12. 体積(3)・種々の量の計算

9 [I . 2020 京都大 II . 2006 東京大]

I . x, y, z を座標とする空間において, xz 平面内の曲線 $z = \sqrt{\log(1+x)}$ ($0 \leq x \leq 1$) を z 軸の周りに 1 回転させるとき, この曲線が通過した部分よりなる図形を S とする. この S をさらに x 軸の周りに 1 回転させるとき, S が通過した部分よりなる立体を V とする. このとき, V の体積を求めよ.

II . a を正の実数, θ を $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす実数とする. xyz 空間において, 点

$(a, 0, 0)$ と点 $(a + \cos \theta, 0, \sin \theta)$ を結ぶ線分を, x 軸の周りに 1 回転させてできる曲面を S とする. 更に, S を y 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を V とする.

(1) V を a と θ を用いて表せ.

(2) $a=4$ とする. V を θ の関数と考えて, V の最大値を求めよ.

10 [I . 1997 慶応義塾大 II . 2006 東京医科歯科大]

I . xy 平面で原点 $O(0, 0)$ を中心とし, 半径が 1 の円 C と, 半径が $r = \frac{m}{n}$ で, 中心が円 C の外側にあり, 点 $P(1, 0)$ で円 C に接している円 S を考える. ただし, m, n は互いに素な自然数とする. 最初, 円 S の定点 Q が点 P と一致している状態から, 円 S を円 C に C の外側から接したまま, かつ滑ることなく C の周りを反時計回りに回転させてゆく.

(1) 円 C と円 S の接点が R のとき $\angle POR = \theta$ ($\theta \geq 0$) とおく. このときの点 Q の座標 (x, y) を r, θ を用いて表せ.

(2) 点 Q が再び点 P に戻ってくるまでに, 円 S は円 C の周りを何回まわるか.

(3) 点 Q が再び点 P に戻ってくるまでこの回転をさせるとき, 点 Q の描く曲線の長さ l を求めよ.

II . (1) 関数 $g(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$ の導関数 $g'(x)$ を求めよ.

(2) 次の 2 条件 (a), (b) を満たす微分可能な関数 $\phi(x)$ およびその逆関数 $h(x)$ を求めよ.

(a) $\phi(0) = 0$

(b) $\phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$

(3) 次の 4 条件 (a), (b), (c), (d) を満たす微分可能な関数 $f(x)$ を求めよ.

(a) $f(0) = 1$

(b) $f'(0) = 0$

(c) すべての実数 α に対して, $f(\alpha) = f(-\alpha)$ が成立する.

(d) 正の実数 t に対して, 座標平面上の曲線 $y = f(x)$ ($0 \leq x \leq t$) の長さを $l(t)$ と表すとき, すべての正の実数 t に対して $l(t) = f'(t)$ が成立する.

11 [2006 京都大]

$H > 0$, $R > 0$ とする。座標空間内において、原点 O と点 $P(R, 0, H)$ を結ぶ線分を、 z 軸の周りに回転させてできる容器がある。この容器に水を満たし、原点から水面までの高さが h のとき単位時間あたりの排水量が、 $\sqrt{h}$ となるように水を排出する。すなわち、時刻 t までに排出された水の総量を $V(t)$ とおくと、 $\frac{dV}{dt} = \sqrt{h}$ が成り立つ。このとき、すべての水を排出するのに要する時間を求めよ。