

1 [2003 武蔵工業大]

方程式 $\alpha(x^2+3x+3)=x+1$ が実数解をもつような定数 α の値の範囲を求めよ。また、関数 $y=\frac{x+1}{x^2+3x+3}$ の最大値と最小値を求めよ。

2 [長崎大]

- (1) x が 0 でない実数をとって変化するとき、 $x+\frac{1}{x}$ が動き得る範囲を求めよ。
- (2) 関数 $f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+2\left(x+\frac{1}{x}\right)+3$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。

5 [1996 神戸学院大]

- x, y が実数で $x^2-2xy+2y^2=2$ であるとき
- (1) x のとりうる値の範囲を求めよ。
- (2) $-x^2-2x+1$ のとりうる値の範囲を求めよ。
- (3) $x+2y$ のとりうる値の範囲を求めよ。

6 [2009 慶応義塾大]

- 座標平面上の点 (x, y) が $x^2-2xy+2y^2=4$ を満たして動くとき
- (1) $x+y$ の最大値を求めよ。
- (2) $\frac{x}{y+4}$ の最大値を求めよ。

7 [2013 東京理科大]

- 等式 $x^2-6xy+12y^2=1$ を満たす正の実数 x, y を考える。
- (1) $z=x+3y$ は $x=\sqrt{}$, $y=\sqrt[4]{}$ のとき、最大値 $\sqrt[3]{}$ をとる。
- (2) $z=xy$ は $x=\sqrt[3]{}$, $y=\sqrt[4]{}$ のとき、最大値 $\sqrt[6]{}$ をとる。

3 [1997 東京理科大]

x が実数のとき、 $y=\frac{8x+4}{x^2-2x+5}$ のとりうる値の範囲を求めよ。

4 [2011 大阪薬科大]

x を 0 でない実数とすると、関数 $f(x)=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)$ の最小値を求めよ。

8 [2017 東京理科大]

x の 2 次方程式 $x^2+(a+1)x+a^2+a-1=0$ が実数解をもつような実数 a の値の範囲は
 $\frac{\text{ア}}{\text{イ}} \leq a \leq \frac{\text{ウ}}{\text{エ}}$ である。
 a がこの範囲の値をとるとき、上の 2 次方程式の解 x がとりうる値の範囲は
 $\frac{\text{オ}}{\text{カ}} \leq x \leq \frac{\text{キ}}{\text{ク}}$ である。方程式 $x^2+(a+1)x+a^2+a-1=0$ を満たす整数の組
 (x, a) は全部で ク 個ある。

9 [2021 神戸大]

a を実数とする。 x の 2 次方程式 $x^2+(a+1)x+a^2-1=0$ について、次の問いに答えよ。
(1) この 2 次方程式が異なる 2 つの実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。
(2) a を (1) で求めた範囲で動かすとき、この 2 次方程式の実数解がとりうる値の範囲を求めよ。

10 [1998 長崎総合科学大]

x の 2 次方程式 $x^2-4x\cos\theta-(2\sin^2\theta+\cos\theta+1)=0$ …… ① について、次の各問いに答えよ。ただし、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ とする。
(1) $x=-1$ が ① の 1 つの解であるとき、 θ の値を求めよ。
(2) ① は常に相異なる 2 つの実数解をもつことを示せ。
(3) ① の実数解 x のとる値の範囲を求めよ。

11 [金沢大]

$a^2+b^2 \leq 1$ を満たす実数 a, b に対して、2 次方程式 $x^2+2ax+b-1=0$ …… ① が与えられている。
(1) 方程式 ① は実数解をもつことを示せ。
(2) 方程式 ① の解を α, β とする。 $\alpha=1$ のとき、解 β のとりうる値の範囲を求めよ。

12 [2005 東京大]

0 以上の実数 s, t が $s^2+t^2=1$ を満たしながら動くとき、方程式 $x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0$ の解のとる値の範囲を求めよ。

13[1999 東邦大]

連立方程式 $x^2+y^2=18$, $x^3+y^3=50$ の実数解を求める.

$x+y=u$, $xy=v$ とおくと, 方程式は $u^2-\text{ }v=18$, $u^3-\text{ }uv=50$ となる.

これから v を消去すると $\left(u-\text{ }\right)\left(u^2+\text{ }u-\text{ }\right)=0$ となるから, $u=\text{ }, \text{ }, \text{ }$ である. 一方 x, y は実数であるから, u, v は $u^2-\text{ }v\geq \text{ }$ を満たす実数となり, $-\text{ }\leq u\leq \text{ }$ が導かれる.

よって, u の値は $u=\text{ }$ のみであり, $v=-\text{ }$ である. ゆえに, 求める解は $x=\text{ }, y=\text{ }$ または $x=\text{ }, y=\text{ }$ (ただし, $\text{ }>\text{ }$) である.

14[2017 慶応義塾大]

x, y は $xy+x+y=20$, $x^2y+xy^2=91$ を満たす実数とする. このとき $x^2+y^2=\text{ }$ であり $x^3+y^3=\text{ }$ である.

15[1997 東京大]

a, b は実数で $a^2+b^2=16, a^3+b^3=44$ を満たしている.

(1) $a+b$ の値を求めよ.

(2) n を 2 以上の整数とすると, a^n+b^n は 4 で割り切れる整数であることを示せ.

16[2012 弘前大]

点 (a, b) は円周 $x^2+y^2=1$ 上を動くとする.

(1) $t=a+b$ とおくと, $a+ab+b$ を t の式で表せ.

(2) $a+ab+b$ の最大値と最小値を求めよ. また, そのときの $t=a+b$ の値をそれぞれ求めよ.

17[2021 関西学院大]

2 つの実数 x, y は関係式 $x^2-xy+y^2=2$ を満たしながら動くとする. このとき, $x+y-xy$ の最大値を求めよう. $s=x+y$ とおくと, xy を s の式で表すと $xy=\text{ }$ である. また, s のとりうる値の範囲は $\text{ }\leq s\leq \text{ }$ である.

したがって, $x+y-xy$ の最大値は である.

18[2022 滋賀大]

x, y を実数とし, $x^2-xy+y^2=1$ を満たすとする. $t=x+y$ とおくと, 次の問いに答えよ.

(1) xy を t を用いて表せ.

(2) t の値の範囲を求めよ.

(3) $2x+3xy+2y$ の最大値および最小値と, そのときの x, y の値を求めよ.

19 [2012 甲南大]

座標平面において、連立不等式 $x \geq 0, y \geq 0, 2 \leq x + y \leq 6, 2x + y \leq 10, x + 2y \leq 10$ の表す領域を D とする。なお、 x 座標、 y 座標がともに整数である点を格子点という。

(1) 領域 D を図示せよ。

(2) 点 $P(x, y)$ が領域 D に含まれる格子点を動くとき、 $3x + 2y$ の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの x, y の値を求めよ。

(3) 点 $P(x, y)$ が領域 D に含まれる格子点を動くとき、 $3x + 2y$ がとる値のうちで最大値の次に大きな値を求めよ。また、そのときの x, y の値を求めよ。

21

次のように媒介変数表示される曲線はどのような曲線となるか。

(1) $x = 2t, y = 3t$

(2) $x = t - 1, y = t^2 - 1$

(3) $x = t^2, y = t^4$

(4) $x = \frac{1}{t^2 + 1}, y = \frac{t}{t^2 + 1}$

20 [2023 北海道大]

連立不等式

$3x + 5y \leq 9, 7x + 9y \leq 20 \cdots \cdots (*)$

を考える。

- (1) 座標平面において、直線 $3x + 5y = 9$ を l とし、 $7x + 9y = 20$ を m とする。 l と m の交点の座標を求めよ。
- (2) 実数 x, y が $(*)$ をみたすとき、 $5x + 7y$ の最大値を求めよ。
- (3) 1 次方程式 $5x + 7y = 1$ の整数解をすべて求めよ。
- (4) a を整数とすると、1 次方程式 $5x + 7y = a$ の整数解をすべて求めよ。
- (5) 整数 x, y が $(*)$ を満たすとき、 $5x + 7y$ の最大値を求めよ。また、最大値をとるときの x, y の値を求めよ。

22

次のように媒介変数表示される曲線はどのような曲線となるか。

(1) $x = 3t - 2, y = 3 - t$

(2) $x = \sqrt{t}, y = 1 + t$

(3) $x = t + \frac{1}{t}, y = t^2 + \frac{1}{t^2}$

23[2008 東北学院大] 平面上に2点 A(1, 0), B(−1, 0) が与えられているとき, 条件 $2PA \leq PB \leq 3PA$ を満たす点 P の存在範囲を図示せよ。	25 2 直線 $mx - y - m - 1 = 0, x + my - 2m - 3 = 0$ の交点を P とする. 次の場合について, P の軌跡を求めよ. (1) m が任意の実数値をとる場合 (2) $m > 0$ の場合
24[2018 北海道大] 座標平面上に3点 O (0, 0), $A\left(\frac{15}{2}, 0\right)$, B (11, 11) がある. 条件 $BQ \geq OQ \geq 2AQ$ を満たす点 Q (x, y) の全体を D とする. (1) D を座標平面上に図示せよ. また, $BQ = OQ = 2AQ$ となるすべての点 Q の座標を求めよ. (2) $0 < p \leq 11$ とし, P を点 ($p, 11$) とする. 条件 $OQ \geq PQ$ を満たす D の点 Q が存在するような p の値の範囲を求めよ。	26[長崎大] m が $-\sqrt{3} \leq m \leq 1$ を満たしながら変化するとき, 2 直線 $mx - y + 4m = 0, x + my - 4 = 0$ について, (1) 2 直線の交点を P とするとき, 点 P の軌跡を求めよ. (2) 点 P に関する点 A (−1, 1) の対称点を B とするとき, 点 B の軌跡を求めよ.

27[大阪市立大] 原点 O とは異なる 2 点 $P(a, b), Q(c, d)$ があり, $\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP} (k>0)$ を満たすとする. また, $OP \cdot OQ=4$ とする. (1) k を c, d を用いて表せ. (2) 点 P が直線 $2x+y-6=0$ 上を動くとき, 点 Q の軌跡を求めよ. (3) 点 P が直線 $2x+y-6=0$ 上を点 $(0, 6)$ から点 $(3, 0)$ まで動くとき, 点 Q の軌跡を求め, 図示せよ.	29[2004 横浜国立大] 座標平面上で, 原点 O と異なる点 $P(x, y)$ に対し, O を端点とする半直線 OP 上に点 $Q(X, Y)$ を $OP \cdot OQ=4$ が成り立つようにとるものとする. (1) X, Y を x, y で表せ. (2) P が $x+y \geq 2, x^2+y^2 \leq 4$ で表される領域を動くとき, Q の存在する範囲を D とする. D を不等式で表せ. (3) (2) で求めた範囲 D を図示し, その面積を求めよ.
28[2007 千葉工業大] O を原点とする xy 平面上に直線 $\ell: \sqrt{3}x+y=2\sqrt{3}$ がある. ℓ 上に点 P をとり, O を端点とする半直線 OP 上に点 Q を $OP \cdot OQ=8$ となるようにとる. $P(p, q), Q(X, Y)$ とするとき, 次の問いに答えよ. (1) $P(2, 0)$ のとき, $Q(\fbox{ }, \fbox{ })$ である. (2) P, Q が O を端点とする半直線上にあることから, $p=tX, q=tY (t>0)$ とおくことができる. このとき, $t=\frac{\fbox{ }}{X^2+Y^2}$ である. (3) $P(p, q)$ が ℓ 上にあることから, X, Y は$X^2+Y^2-\fbox{ }X-\fbox{ }Y=0$を満たす. よって, Q は中心 $(\fbox{ }, \fbox{ })$, 半径 $\fbox{ }$ の円上にある. (4) P が ℓ 上を点 $(2, 0)$ から点 $(3, -\sqrt{3})$ まで動くとき, Q が描く弧の長さは $\fbox{ }$ である.	30[岐阜薬科大] xy 平面において, 原点 O 以外の点 $P(x, y)$ に対して, 半直線 OP 上に $OP \cdot OQ=4$ を満たす点 $Q(s, t)$ をとる. (1) 点 $P(x, y)$ の座標 x, y を, 点 $Q(s, t)$ の座標 s, t を用いて表せ. (2) 点 P が直線 $x+2y=5$ 上を動くとき, 点 Q の軌跡を求め xy 平面上に図示せよ. (3) $(x-1)^2+(y-2)^2<5$ かつ $x+2y<5$ を満たす領域を D とする. 点 P が領域 D 上を動くとき, 点 Q の動く領域を求め xy 平面上に図示せよ.

31[2012 東京理科大]

- O を原点とする座標平面において、円 $x^2+y^2=4$ の外部の点 A からこの円に 2 本の接線を引き、その接点を P, Q とする。線分 PQ の中点を M とし、 M の座標を (s, t) とする。
- 点 A の座標が (a, b) であるとき、 a, b を用いて、点 M の座標 (s, t) を表せ。
 - 点 A が直線 $2x+3y=12$ 上を動くとき、点 M の軌跡を求めよ。

33[1997 北海道大]

- 平面上に原点 O を中心とする半径 r の円 C と点 $A(r, 0)$ がある。 y 軸に平行な直線 $x=r$ 上に点 $P(r, t)$ をとる。ただし、 $t \neq 0$ とする。
- 点 P を通り、円 C と接する直線で直線 PA と異なるものを l とする。 l と円 C との接点を T とするとき、点 T の座標を r, t を用いて表せ。
 - 線分 AT と線分 OP との交点を Q とする。点 P が直線 $x=r$ の第 1 象限にある部分を動くとき、点 Q の軌跡を求めよ。

32[2009 南山大]

- 円 $C: x^2+y^2=1$ とその外側に点 T があり、 T から C へ引いた 2 本の接線の接点を M, N とする。
- T の座標を (p, q) とするとき、 T を中心とし M と N を通る円 C' の方程式を p, q を用いて表せ。
 - 2 点 M, N を通る直線 l の方程式を p, q を用いて表せ。
 - (2) の直線 l が点 $A(2, 1)$ を通るように T が動くとき、 T の座標 (p, q) が満たすべき条件を求め、 T の軌跡を図示せよ。
 - 点 $T(p, q)$ が直線 $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1$ 上を動くとき、(2) の直線 l が常に通る点 B の座標を求めよ。

34[滋賀県立大]

- xy 平面上の原点 O を中心とする半径 1 の円 C がある。 C の外部の点 $(a, b) (a^2+b^2>1)$ から C に接線を 1 本引き、その接点を P とし、半直線 OA 上に $OA \cdot OQ = OP^2$ となる点 Q をとる。
- $OA \perp PQ$ となることを示せ。
 - Q の座標を a, b を用いて表せ。
 - A が $b=\sqrt{2}, -\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$ の範囲を動くとき、 Q の軌跡を求めて図示せよ。

35[京都大] xy平面上で、円 $C:x^2+y^2=1$ の外部にある点 $P(a,b)$ を考える．点 P から円 C に引いた 2 つの接線の接点を Q_1, Q_2 とし、線分 Q_1Q_2 の中点を Q とする．点 P が円 C の外部で、$x(x-y+1)<0$ を満たす範囲にあるとき、点 Q の存在する範囲を図示せよ．	37[北海道薬科大] 2 次方程式 $x^2-px+q=0$ の実数解を α, β とする．点 (α, β) が原点を中心とする半径 2 の円の内部を動くとき、点 (p, q) の動く範囲を図示せよ．
36[南山大] 座標平面上で、円 $C:x^2+y^2=1$ とその外部にある点 $P(a,b)$ を考える．P から C に引いた 2 つの接線の接点を M, N とし、線分 MN の中点を Q とする． (1) P を中心とし、2 点 M と N を通る円の方程式を a, b を用いて表せ． (2) M, N を通る直線の方程式が $ax+by=1$ で表されることを示せ． (3) Q の座標を a, b を用いて表せ． (4) P が $x-y+2<0$ を満たす範囲にあるとき、Q の範囲を求め、その領域を図示せよ．	38[鳥取大] 実数の定数 a, b に対して、連立方程式 $x+y=a, -xy=b \cdots \cdots \textcircled{1}$ を考える． (1) 連立方程式 $\textcircled{1}$ が実数解をもつとき、定数 a, b の満たす条件を求めよ． (2) 連立方程式 $\textcircled{1}$ が実数解 (x, y) をもち、かつ、それが $x^2+y^2\leq 8$ の範囲にあるとき、定数 a, b の満たす条件を求め、点 (a, b) 全体のなす領域 D を図示せよ． (3) (2) の領域 D の面積を求めよ．

39[2017 立命館大]

点 (x, y) が、円 $x^2 + y^2 = 1$ の周と内部を動くとき、点 $(x + y, x - y)$ が動く範囲の面積を求める。

まず、 $p = x + y, q = x - y$ とおき、 x, y を p と q を用いて表すと、 $x = \frac{p+q}{2}$ 、 $y = \frac{p-q}{2}$ となる。次に、点 (x, y) が、円 $x^2 + y^2 = 1$ の周と内部を動くという条件を、 p と q を用いて表すと、 $p^2 + q^2 \leq 2$ となる。よって、点 $(x + y, x - y)$ が動く範囲の面積は π となる。

40[関西大]

点 (x, y) が $x^2 + y^2 \leq 2(x + y), x^2 - y^2 \geq x - y$ を満たしながら動くとき、点 $(x + y, x - y)$ が動く範囲を図示せよ。

41[北海道大]

(1) $|X| + |Y| \leq 2$ を満たす点 $P(X, Y)$ の存在する範囲を XY 平面に図示せよ。
(2) $x = X - Y, y = XY$ とおく。点 $Q(X, Y)$ が (1) の範囲を動くとき、点 (x, y) の動く範囲を求め、これを平面に図示せよ。

42[2023 慶応義塾大]

原点を O とする xy 平面上に点 $A(1, -1)$ があり、点 B は $\overrightarrow{AB} = (2\cos\theta, 2\sin\theta) (0 \leq \theta \leq 2\pi)$ を満たす点である。 B の軌跡を境界線とする 2 つの領域のうち、点 A を含む領域を C とする。ただし、領域 C は境界線を含む。

- (1) 点 B の軌跡の方程式は $x^2 + y^2 = 4$ である。
- (2) 点 (x, y) が xy 平面上のすべての点を動くとき、点 $(x - y, xy)$ が xy 平面上で動く範囲は $y \geq x^2$ で表される領域である。
- (3) 点 (x, y) が領域 C 上のすべての点を動くとき、点 $(x - y, xy)$ が xy 平面上で動く領域を領域 D とする。
- (i) 領域 D を図示しなさい。ただし、領域は斜線で示し、境界線となる式も図に記入すること。
- (ii) 領域 D の面積は $\frac{1}{2}\pi$ である。

43[関西大]

座標平面上で点 $P(x, y)$ が $|x + y| + |x - y| \leq 2$ を満たしながら動く。
(1) 点 P の存在する範囲を図示せよ。
(2) 点 $Q(x + y, x^2 + y^2)$ の存在する範囲を図示せよ。

45[中央大]

xy 平面から原点を除いた部分を E で表す。 E の点 $P(x, y)$ に対して $u = -\frac{x}{x^2 + y^2}, v = \frac{y}{x^2 + y^2}$ を座標とする E の点 $Q(u, v)$ を対応させる。
(1) $P=Q$ となるような点 P は 個ある。
(2) 点 P が $x^2 + y^2 = 4$ 上を動くとき、 $\overline{PQ}$ の最大値は である。
(3) 点 P が 2 点 $A(-1, 1)$ と $B(1, 1)$ を結ぶ線分上を動くとき、点 Q の軌跡の長さは である。
(4) O_1 は 2 点 $C(1, 0)$ と $D(-1, 0)$ を通る 1 つの円とする。点 P が O_1 上を動くとき、点 Q の軌跡によって囲まれる図形の面積を S とする。このような円 O_1 の中心が y 軸上を動くとき、面積 S の最小値は である。

46[福岡大]

点 (x, y) が直線 $x - 2y = 1$ 上を動いている。 $X = \frac{x}{x^2 + y^2}, Y = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ とおくとき、 x, y を X, Y で表せ。また (X, Y) の表す図形を求めよ。

47[上智大]

xy 平面上の点 (x, y) は関係式 $u = \frac{x + 2}{(x + 2)^2 + y^2}, v = \frac{-y}{(x + 2)^2 + y^2}$ により uv 平面上の点 (u, v) に変換されるものとする。
(1) xy 平面上の図形 S が、上の変換によって uv 平面上の原点を中心とする半径 1 の円に移るものとする、 S はどのような図形か。
(2) xy 平面における直線 $y = x$ は uv 平面においてはどのような図形に移されるか求めよ。
(3) xy 平面において、 $x > 0$ で表される領域は uv 平面においてはどのような図形に移されるか求めよ。

44[2017 横浜国立大]

実数 a, b に対して、 xy 平面上の点 $P(a + b, a^2 + b^2)$ を考える。
(1) a, b がすべての実数を動くとき、 P の存在範囲を xy 平面上に図示せよ。
(2) a, b が $|a| + |b| \leq 2$ を満たしながら動くとき、 P の存在範囲を xy 平面上に図示せよ。
(3) 点 (x, y) が (2) で求めた範囲を動くとき、 $x - |y - 3|$ の最大値と最小値を求めよ。

48[札幌医大] s, tが$0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1$の範囲を動くとする。このとき、関係式$x = s + t, y = s^2$により定義される$xy$平面上の点$(x, y)$が動く範囲を図示せよ。	51[2012 東北大] s, tを実数とする。 (1) $x = s + t + 1, y = s - t - 1$とおく。$s, t$が$s \geq 0, t \geq 0$の範囲を動くとき、点$(x, y)$の動く範囲を座標平面内に図示せよ。 (2) $x = st + s - t + 1, y = s + t - 1$とおく。$s, t$が実数全体を動くとき、点$(x, y)$の動く範囲を座標平面内に図示せよ。
49[中央大] x, y, u, vの間に、$u = 2x + y, v = y^2$の関係が成り立つとする。 (1) 点(x, y)が4点O(0, 0), A(1, 0), B(1, 1), C(0, 1)を頂点とする正方形の辺上をOからA, B, Cと回ってOに戻るとき、点(u, v)の描く曲線を図示せよ。 (2) 点(x, y)が4点B, C, D(0, -1), E(1, -1)を頂点とする長方形の内部Rにあるとき、点(u, v)の存在する範囲Sを図示せよ。 (3) Rの異なる2点でSの同じ点に対応するようなものがあれば、そのようなRの点の存在する範囲を示せ。	
50[2000 上智大] 座標平面において、4点(1, 0), (1, 1), (-1, 1), (-1, 0)を頂点とする長方形の内部をAとおく。また、3点(0, 0), (1, 0), (0, 1)を頂点とする三角形の内部をBとおく。 (1) 点P(x, y)がA内を動くとき、$s = x + 3y, t = x^2$を満たす点Q(s, t)の動く範囲を求め、それを図示せよ。 (2) (1)において、次の条件(a)を満たすような点P(x, y)の動く範囲を求め、それを図示せよ。 ・条件(a) 点P(x, y)に対応する点Q(s, t)はB内にある。 (3) (1)において、次の条件(b)を満たすような点P(x, y)の動く範囲を求め、それを図示せよ。 ・条件(b) 点P(x, y)と異なるA内の点は、点P(x, y)に対応する点Q(s, t)と異なる点に対応する。	52[2005 名古屋大] 実数t, sが$t > 0, s > 0$の範囲を動くとき、$x = t + s, y = ts + \frac{1}{t}$で定まる点$(x, y)$の動く範囲を$xy$平面に図示せよ。