

3.2 面積(2)

(1) 曲線で囲まれた部分の面積

例1

2つの楕円 $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$, $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$ で囲まれる共通部分の面積を求めよ。

(解説)

$$\frac{x^2}{3} + y^2 = 1 \cdots \textcircled{1}, \quad x^2 + \frac{y^2}{3} = 1 \cdots \textcircled{2} \text{ とする}$$

楕円 ①, ② は, それぞれ x 軸, y 軸, 原点に関して対称である

$$\textcircled{1} \text{ より, } y^2 = 1 - \frac{x^2}{3} \cdots \textcircled{3}$$

②より

$$x^2 + \frac{1}{3} \left(1 - \frac{x^2}{3} \right) = 1 \quad \therefore x = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \quad y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ (複号任意)}$$

第1象限において, ①と②の交点は

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

右図の斜線部分の面積を S とすると, 求める面積は $8S$ である

③において, $y \geq 0$ より

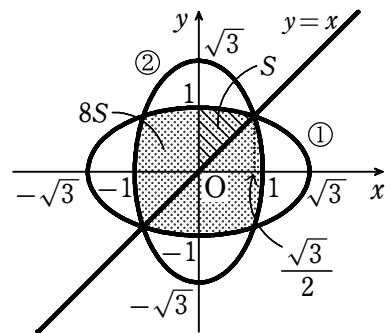
$$y = \sqrt{1 - \frac{x^2}{3}}$$

よって

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{1 - \frac{x^2}{3}} dx - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \sqrt{3 - x^2} dx - \frac{3}{8} = \frac{\sqrt{3}}{12} \pi \end{aligned}$$

したがって, 求める面積は

$$8S = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{12} \pi = \frac{2\sqrt{3}}{3} \pi$$



例2

- (1) $x + \sqrt{x^2 - 1} = t$ とおくことにより, 不定積分 $\int \sqrt{x^2 - 1} dx$ を求めよ.
- (2) 曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上に点 $P(p, q)$ ($p > 1, q > 0$) と点 $A(1, 0)$ がある. 2直線 OA, OP とこの曲線とで囲まれる図形の面積 S を p の式で表せ.
- (3) (2)における S を $\frac{\theta}{2}$ とおくとき, p, q を θ の式で表せ.

解説

- (1) $x + \sqrt{x^2 - 1} = t$ より

$$\sqrt{x^2 - 1} = t - x \quad \therefore x = \frac{t^2 + 1}{2t}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t^2 - 1}{2t^2}, \quad \sqrt{x^2 - 1} = t - \frac{t^2 + 1}{2t} = \frac{t^2 - 1}{2t}$$

よって

$$\int \sqrt{x^2 - 1} dx = \int \frac{t^2 - 1}{2t} \cdot \frac{t^2 - 1}{2t^2} dt = \frac{1}{4} \int \left(t - \frac{2}{t} + \frac{1}{t^3} \right) dt$$

$$= \frac{t^2}{8} - \frac{1}{8t^2} - \frac{\log|t|}{2} + C$$

$$= \frac{2tx \cdot 2t\sqrt{x^2 - 1}}{8t^2} - \frac{\log|x + \sqrt{x^2 - 1}|}{2} + C$$

$$= \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2 - 1} - \log|x + \sqrt{x^2 - 1}|) + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

- (2) 直線 OP は, 曲線と第3象限でも交わるから

$$S = 2 \left(\frac{pq}{2} - \int_1^p \sqrt{x^2 - 1} dx \right)$$

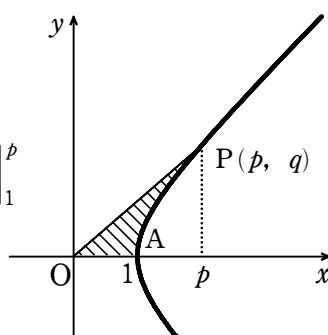
$$= p\sqrt{p^2 - 1} - \left[x\sqrt{x^2 - 1} - \log|x + \sqrt{x^2 - 1}| \right]_1^p$$

$$= \log(p + \sqrt{p^2 - 1})$$

- (3) $\log(p + \sqrt{p^2 - 1}) = \frac{\theta}{2}$ より

$$p + \sqrt{p^2 - 1} = e^{\frac{\theta}{2}} \quad \sqrt{p^2 - 1} = e^{\frac{\theta}{2}} - p \quad -1 = e^{\theta} - 2pe^{\frac{\theta}{2}}$$

$$\therefore p = \frac{e^{\frac{\theta}{2}} + e^{-\frac{\theta}{2}}}{2}, \quad q = \sqrt{p^2 - 1} = \frac{e^{\frac{\theta}{2}} - e^{-\frac{\theta}{2}}}{2}$$



例3

$y^2 = (x-2)^2(x+1)$ で決まる曲線を C とする。

(1) 関数 $y = (x-2)\sqrt{x+1}$ の増減を調べ、関数のグラフの概形をかけ。

(2) 曲線 C の概形をかけ。

(3) 曲線 C で囲まれる部分の面積を求めよ。

(解説)

(1) $f(x) = (x-2)\sqrt{x+1}$ とする

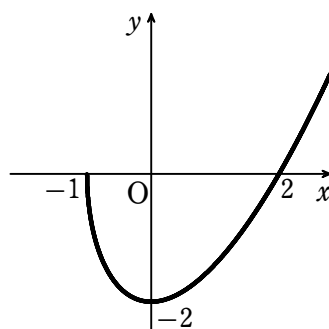
定義域は $x \geq -1$

$$f'(x) = \sqrt{x+1} + \frac{x-2}{2\sqrt{x+1}} = \frac{3x}{2\sqrt{x+1}}$$

$f'(x) = 0$ とすると $x = 0$

$f(x)$ の増減表は下図

x	-1	...	0	...
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	0	↘	-2	↗



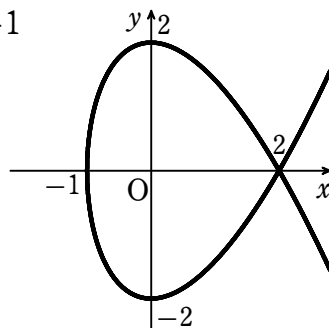
よって、グラフの概形は右図

(2) 定義域は $y^2 = (x-2)^2(x+1) \geq 0$ より、 $x \geq -1$

$x \geq -1$ のとき、

$$y = \pm |x-2|\sqrt{x+1} \quad \therefore y = \pm f(x)$$

よって、(1) より曲線 C の概形は右図



(3) 求める面積を S とすると

$$S = \int_{-1}^2 \{ -(x-2)\sqrt{x+1} - (x-2)\sqrt{x+1} \} dx$$

$$= -2 \int_{-1}^2 (x-2)\sqrt{x+1} dx$$

$$= -2 \int_{-1}^2 \left\{ (x+1)^{\frac{3}{2}} - 3(x+1)^{\frac{1}{2}} \right\} dx$$

$$= -2 \left[\frac{2}{5} (x+1)^{\frac{5}{2}} - 2(x+1)^{\frac{3}{2}} \right]_{-1}^2 = \frac{24\sqrt{3}}{5}$$

例4

座標平面において、曲線 $y^2 = x^2(3 - x^2)$ を考える。

(1) この曲線上の点の x 座標および y 座標のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) この曲線によって囲まれた部分の面積の合計を求めよ。

(解説)

(1) 点 (x, y) がこの曲線上にあるとすると、

点 $(x, -y)$, $(-x, y)$, $(-x, -y)$ も曲線上にあるから、

この曲線は x 軸, y 軸, 原点に関してそれぞれ対称である

$x \geq 0, y \geq 0$ で考えて

$y^2 \geq 0$ より

$$x^2(3 - x^2) \geq 0 \quad x^2 - 3 \leq 0 \quad \therefore 0 \leq x \leq \sqrt{3}$$

このとき, $y = x\sqrt{3 - x^2}$

$f(x) = x\sqrt{3 - x^2}$ とおくと

$$f'(x) = \sqrt{3 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{3 - x^2}} = \frac{3 - 2x^2}{\sqrt{3 - x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \text{ とすると, } x^2 = \frac{3}{2} \quad \therefore x = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

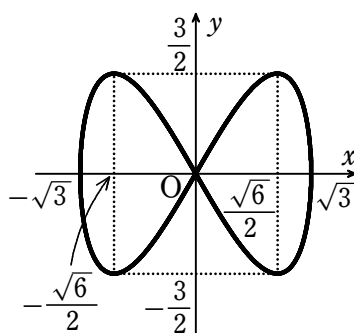
$0 \leq x \leq \sqrt{3}$ における y の増減表は下図

x	0	...	$\frac{\sqrt{6}}{2}$	...	$\sqrt{3}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	$\frac{3}{2}$	↘	0

対称性を考えて、曲線 $y^2 = x^2(3 - x^2)$ のグラフは右図のようになる。

よって、求める値の範囲は

$$-\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{3}, \quad -\frac{3}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$$



(2) この曲線で囲まれた部分は x 軸, y 軸に関して対称であるから、求める面積を S とすると

$$S = 4 \int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{3 - x^2} dx = -2 \left[\frac{2}{3} (3 - x^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\sqrt{3}} = -\frac{4}{3} (0 - 3^{\frac{3}{2}}) = 4\sqrt{3}$$

(2) 媒介変数表示と面積

例5

曲線 $x=2\cos\theta$, $y=3\sin\theta$ ($0\leq\theta\leq 2\pi$) によって囲まれた部分の面積 S を求めよ.

(解説)

$0\leq\theta\leq 2\pi$ のとき, 曲線は楕円の全周を表す

面積 S は

$$S=4\int_0^2 y \, dx \quad \frac{dx}{d\theta} = -2\sin\theta$$

よって

$$S=4\int_0^2 y \, dx=4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 3\sin\theta \cdot (-2\sin\theta) d\theta=24\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \, d\theta$$

$$=12\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2\theta) d\theta=12\left[\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=6\pi$$

[注] 置換積分法により, $\int_0^2 y \, dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 y \frac{dy}{d\theta} d\theta$ として計算する。

θ	$\frac{\pi}{2}$	$\rightarrow$	0
x	0	$\rightarrow$	2

例6

t ($t\geq 0$) を媒介変数として $\begin{cases} x=e^t+e^{-t} \\ y=e^t-e^{-t} \end{cases}$ で表される曲線を C とする.

(1) 曲線 C の概形を図示せよ.

(2) $x=4$ となる t の値を求めよ.

(3) 曲線 C , x 軸および直線 $x=4$ で囲まれた図形の面積を求めよ.

(解説)

(1) $t\geq 0$ のとき, $e^t\geq 1$, $0<e^{-t}\leq 1$

相加相乗平均より, $x\geq 2$

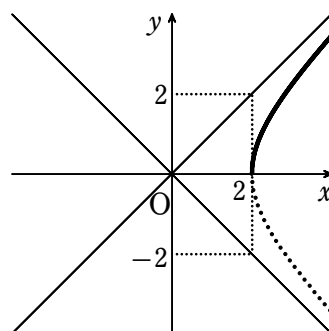
また, $y\geq 0$

$(e^t+e^{-t})^2=(e^t-e^{-t})^2+4e^te^{-t}$ より

$$x^2-y^2=4$$

よって, 曲線 C は, 双曲線 $x^2-y^2=4$ の

$x\geq 2$, $y\geq 0$ の部分



(2) $x=4$ のとき, $y=2\sqrt{3}$ より

$$e^t = 2 + \sqrt{3} \quad \therefore t = \log(2 + \sqrt{3})$$

$$(3) \frac{dx}{dt} = e^t - e^{-t}$$

求める面積は

$$\begin{aligned} \int_2^4 y dx &= \int_0^{\log(2+\sqrt{3})} (e^t - e^{-t})(e^t - e^{-t}) dt \\ &= \int_0^{\log(2+\sqrt{3})} (e^{2t} + e^{-2t} - 2) dt = \left[\frac{1}{2} e^{2t} - \frac{1}{2} e^{-2t} - 2t \right]_0^{\log(2+\sqrt{3})} \\ &= \frac{1}{2} (2 + \sqrt{3})^2 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2 + \sqrt{3})^2} - 2 \log(2 + \sqrt{3}) \\ &= 4\sqrt{3} - 2 \log(2 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

例7

2つの関数 $f(t) = t^3 - 3t^2 + 4$, $g(t) = t^2 - t + 1$ により, 座標平面上の曲線 C を次で定める。

$$C: \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

- (1) 関数 $f(t)$ の極値を求めよ。
- (2) 曲線 C の接線が x 軸と平行となる時, 接点の座標を求めよ。
- (3) 次を満たす実数の組 (a, b) をすべて求めよ。

$$a < b, \quad f(a) = f(b), \quad g(a) = g(b)$$

- (4) 曲線 C で囲まれる図形の面積 S を求めよ。

(解説)

$$(1) f'(t) = 3t^2 - 6t = 3t(t - 2)$$

$$f'(t) = 0 \text{ とすると, } t = 0, 2$$

$f(t)$ の増減表は右図

$t=0$ で極大 極大値 4,

$t=2$ で極小 極小値 0

$$(2) g'(t) = 2t - 1$$

$$g'(t) = 0 \text{ とすると, } t = \frac{1}{2}$$

また, (1)から, $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{9}{4} \neq 0$ より

t	...	0	...	2	...
$f'(t)$	+	0	-	0	+
$f(t)$	↗	4	↘	0	↗

曲線 C の接線が x 軸と平行になるのは $t = \frac{1}{2}$ のとき

このとき、接点の座標は $\left(\frac{27}{8}, \frac{3}{4}\right)$

(3) $f(a) = f(b)$ のとき

$$a^3 - 3a^2 + 4 = b^3 - 3b^2 + 4$$

$$(a-b)\{a^2 + ab + b^2 - 3(a+b)\} = 0$$

$a \neq b$ より

$$a^2 + ab + b^2 - 3(a+b) = 0$$

$$(a+b)^2 - 3(a+b) - ab = 0 \cdots \textcircled{1}$$

$g(a) = g(b)$ のとき

$$a^2 - a + 1 = b^2 - b + 1$$

$$(a-b)(a+b-1) = 0$$

$a \neq b$ より

$$a+b-1=0$$

$$a+b=1 \cdots \textcircled{2}$$

①, ②より

$$1^2 - 3 \cdot 1 - ab = 0$$

$$ab = -2 \cdots \textcircled{3}$$

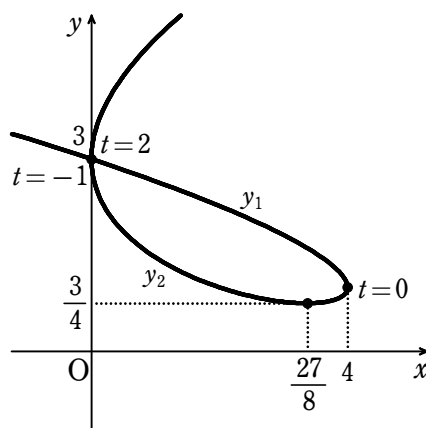
②, ③より, $(a, b) = (-1, 2)$

(4) $-1 \leq t \leq 0$ における y を y_1 ,

$0 \leq t \leq 2$ における y を y_2 とすると,

求める面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 y_1 dx - \int_0^4 y_2 dx \\ &= \int_{-1}^0 y \frac{dx}{dt} dt - \int_2^0 y \frac{dx}{dt} dt = \int_{-1}^2 y \frac{dx}{dt} dt \\ &= \int_{-1}^2 (t^2 - t + 1)(3t^2 - 6t) dt \\ &= \int_{-1}^2 (3t^4 - 9t^3 + 9t^2 - 6t) dt \\ &= \left[\frac{3}{5} t^5 - \frac{9}{4} t^4 + 3t^3 - 3t^2 \right]_{-1}^2 = \frac{81}{20} \end{aligned}$$



例8

中心 $(0, a)$ 、半径 a の円を、 xy 平面上の x 軸の上を x の正の方向に滑らないように転がす。このとき円上の定点 P が原点 $(0, 0)$ を出発するとする。次の問いに答えよ。

- (1) 円が角 t だけ回転したとき、点 P の座標を求めよ。
- (2) (1) において、 t が 0 から 2π まで動いて円が1回転したときの点 P の描く曲線を C とする。曲線 C と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。
- (3) (2) の曲線 C の長さを求めよ。

解説

- (1) 円の中心を A 、円と x 軸の接点を Q とおく

$$OQ = \widehat{QP} \text{ より, } OQ = at$$

$$\text{よって, } \overrightarrow{OA} = (at, a)$$

$$\overrightarrow{AP} \text{ と } x \text{ 軸の正の向きとのなす角は } \frac{3}{2}\pi - t$$

より

$$\overrightarrow{AP} = \left(a \cos \left(\frac{3}{2}\pi - t \right), a \sin \left(\frac{3}{2}\pi - t \right) \right)$$

$$= (-a \sin t, -a \cos t)$$

よって

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

$$= (at, a) + (-a \sin t, -a \cos t) = (at - a \sin t, a - a \cos t)$$

点 P の座標は、 $(at - a \sin t, a - a \cos t)$

- (2) P の座標を (x, y) とおくと

$$x = at - a \sin t, \quad y = a - a \cos t$$

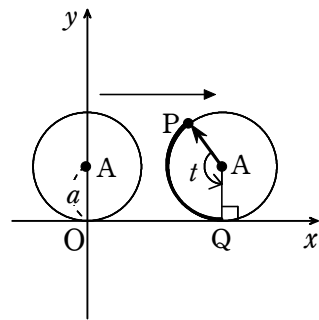
$$t = 0 \text{ のとき, } (x, y) = (0, 0)$$

$$t = 2\pi \text{ のとき, } (x, y) = (2\pi a, 0)$$

$$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t), \quad \frac{dy}{dt} = a \sin t$$

$$0 < t < \pi \text{ のとき, } \frac{dx}{dt} > 0, \quad \frac{dy}{dt} > 0$$

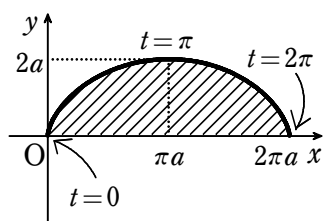
$$\pi < t < 2\pi \text{ のとき, } \frac{dx}{dt} > 0, \quad \frac{dy}{dt} < 0$$



曲線 C の概形は右図

求める面積は

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi a} y dx &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t) dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} (\cos^2 t - 2\cos t + 1) dt \\ &= a^2 \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos 2t}{2} - 2\cos t + 1 \right) dt \\ &= a^2 \left[\frac{\sin 2t}{4} - 2\sin t + \frac{3}{2}t \right]_0^{2\pi} = 3\pi a^2\end{aligned}$$



参考 $a > 0$, t を媒介変数として, 方程式 $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ で表される曲線をサイクロイドという。

例9

xy 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 S_1

と, 点 A を中心とする半径 1 の円 S_2 がある。

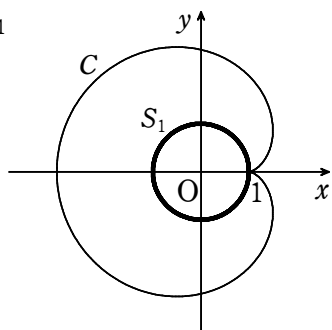
円 S_2 は円 S_1 に外接しながら, すべることなく円 S_1 のまわりを反時計回りに一周する。

点 A の出発点は $(2, 0)$ であり, 円 S_2 上の点で, このとき $(1, 0)$ に位置している点を P とする。点 A が $(2, 0)$ から出発し, $(2, 0)$ に戻

ってくるとき, 点 P の描く曲線を C とすると, 図のようになる。

また, 動径 OA と x 軸の正の部分とのなす角が θ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) であるときの点 P の座標を $(x(\theta), y(\theta))$ とする。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $x(\theta)$, $y(\theta)$ を θ を用いて表せ。
- (2) 曲線 C が x 軸に関して対称であることを証明せよ。
- (3) 曲線 C と円 S_1 によって囲まれた部分の面積を求めよ。



解説

$$(1) \overrightarrow{OA} = (2\cos\theta, 2\sin\theta)$$

S_1 と S_2 の接点を Q とすると

$\overrightarrow{AQ}$ と x 軸の正の向きとのなす角が $\theta + \pi$

であるから $\overrightarrow{AP}$ と x 軸の正の向きとのなす角

は $(\theta + \pi) + \theta = 2\theta + \pi$ より

$$\overrightarrow{AP} = (\cos(2\theta + \pi), \sin(2\theta + \pi))$$

$$= (-\cos 2\theta, -\sin 2\theta)$$

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP}$$

$$= (2\cos\theta - \cos 2\theta, 2\sin\theta - \sin 2\theta)$$

よって

$$x(\theta) = 2\cos\theta - \cos 2\theta, \quad y(\theta) = 2\sin\theta - \sin 2\theta$$

$$(2) x(2\pi - \theta) = 2\cos(2\pi - \theta) - \cos 2(2\pi - \theta)$$

$$= 2\cos\theta - \cos 2\theta$$

$$= x(\theta)$$

$$y(2\pi - \theta) = 2\sin(2\pi - \theta) - \sin 2(2\pi - \theta)$$

$$= -2\sin\theta + \sin 2\theta$$

$$= -y(\theta)$$

より、曲線 C は x 軸に関して対称である

$$(3) \frac{dx(\theta)}{d\theta} = -2\sin\theta + 2\sin 2\theta$$

$$= 2\sin\theta(2\cos\theta - 1)$$

$$0 < \theta < \pi \text{ において } \frac{dx(\theta)}{d\theta} = 0 \text{ とすると,}$$

$$\theta = \frac{\pi}{3}$$

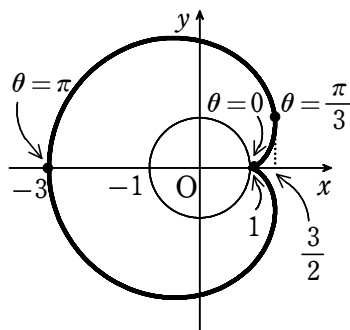
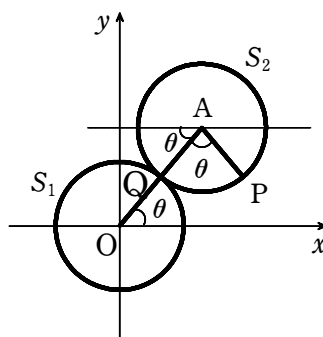
$$x\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}, \quad x(\pi) = -3$$

$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$ における y を y_1 , $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \pi$ における y を y_2 とすると,

曲線 C で囲まれてできる図形の x 軸の上側の部分の面積 S_1 は

$$S_1 = \int_{-3}^{\frac{3}{2}} y_2 dx - \int_1^{\frac{3}{2}} y_1 dx$$

$$= \int_{\pi}^{\frac{\pi}{3}} y(\theta) \frac{dx(\theta)}{d\theta} d\theta - \int_0^{\frac{\pi}{3}} y(\theta) \frac{dx(\theta)}{d\theta} d\theta$$



$$\begin{aligned}
&= \int_{\pi}^0 y(\theta) \frac{dx(\theta)}{d\theta} d\theta \\
&= \int_{\pi}^0 (2\sin \theta - \sin 2\theta)(-2\sin \theta + 2\sin 2\theta) d\theta \\
&= 2 \int_0^{\pi} (2\sin^2 \theta - 3\sin \theta \sin 2\theta + \sin^2 2\theta) d\theta \\
&= 2 \int_0^{\pi} \left(2 \cdot \frac{1 - \cos 2\theta}{2} - 6\sin^2 \theta \cos \theta + \frac{1 - \cos 4\theta}{2} \right) d\theta \\
&= 2 \left[\frac{3}{2}\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta - 2\sin^3 \theta - \frac{1}{8}\sin 4\theta \right]_0^{\pi} = 3\pi
\end{aligned}$$

よって、求める面積 S は

$$S = 2S_1 - \pi \cdot 1^2 = 6\pi - \pi = 5\pi$$

参考 曲線 C をカージオイドという。

(3) 極座標と面積

例10

xy 平面において、原点 O を極とし、 x 軸の正の部分を開始線とする極座標 (r, θ) に関して、極方程式 $r = 1 + \cos \theta$ によって表される曲線 C を考える。ただし、偏角 θ の動く範囲は $0 \leq \theta \leq \pi$ とする。

(1) 曲線 C 上の点で、 y 座標が最大となる点 P_1 の極座標 (r_1, θ_1) 、および x 座標が最小となる点 P_2 の極座標 (r_2, θ_2) を求めよ。

(2) 上の (1) の点 P_1, P_2 に対して、2つの線分 OP_1, OP_2 および曲線 C

で囲まれた部分の面積 S は $S = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta$ となることが知られている。

S の値を求めよ。

解説

$$(1) y = r \sin \theta = (1 + \cos \theta) \sin \theta$$

$$\frac{dy}{d\theta} = -\sin \theta \sin \theta + (1 + \cos \theta) \cos \theta = -(1 - \cos^2 \theta) + \cos \theta + \cos^2 \theta$$

$$= 2\cos^2 \theta + \cos \theta - 1 = (\cos \theta + 1)(2\cos \theta - 1)$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 0 \text{ とすると, } \theta = \frac{\pi}{3}$$

y の増減表は下図

θ	0	...	$\frac{\pi}{3}$	...	π
$\frac{dy}{d\theta}$		+	0	-	
y	0	↗	極大	↘	0

y は $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき最大

このとき、点 P_1 の極座標は $(r_1, \theta_1) = \left(\frac{3}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$

$$x = r \cos \theta = (1 + \cos \theta) \cos \theta$$

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta \cos \theta + (1 + \cos \theta)(-\sin \theta) = -\sin \theta (2 \cos \theta + 1)$$

$$\frac{dx}{d\theta} = 0 \text{ とすると, } \theta = \frac{2}{3}\pi$$

x の増減表は下図

θ	0	...	$\frac{2}{3}\pi$	...	π
$\frac{dx}{d\theta}$		-	0	+	
x	2	↘	極小	↗	0

x は $\theta = \frac{2}{3}\pi$ のとき最小

このとき、点 P_2 の極座標は $(r_2, \theta_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\pi\right)$

$$(2) S = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} \left(1 + 2\cos \theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \left[\frac{3}{2}\theta + 2\sin \theta + \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2}{3}\pi} = \frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

別解

(1)で求めた媒介変数表示を利用して面積を求めてもよい。

参考

極方程式 $r=1+\cos\theta$ で表される曲線をカージオイドという。

参考

極方程式 $r=f(\theta)$ ($\alpha\leq\theta\leq\beta$) と極座標 $(r_1, \alpha), (r_2, \beta)$ で表される 2 点 P_1, P_2 に対して、曲線 $r=f(\theta)$ と 2 直線 OP_1, OP_2 とで囲まれた部分の

面積 S は $S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$ である。

$\angle P_1OP_2$ を n 等分して、等分する半直線

と $r=f(\theta)$ との共有点を順に

$$\alpha=\theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n=\beta$$

とする。 $\Delta\theta=\frac{\beta-\alpha}{n}$ とすると、

$\theta_k=\theta_0+k\Delta\theta$ であり、

図の斜線部分の面積 S_n は

半径が $f(\theta_k)$ 、中心角が $\Delta\theta$ の扇形の面積

の和であるから

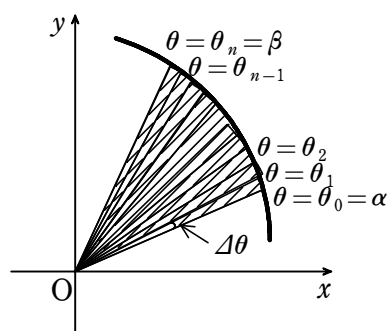
$$S_n=\frac{1}{2}\{f(\theta_0)\}^2\Delta\theta+\frac{1}{2}\{f(\theta_1)\}^2\Delta\theta+\frac{1}{2}\{f(\theta_2)\}^2\Delta\theta+\dots+\frac{1}{2}\{f(\theta_{n-1})\}^2\Delta\theta$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\{f(\theta_k)\}^2\Delta\theta$$

で表される。ここで、 $n\rightarrow\infty$ とすると、 S_n は S に限りなく近づき、定積分と和の極限の公式より

$$S=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$$

が成り立つ。



補1

(1) t に関する関数 $x = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ ($t \geq 0$) のグラフをかけ。

(2) $x = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ ($t \geq 0$) のとき, $\sqrt{x^2 - 1}$ を t を用いて表せ。

(3) O を原点とし, 点 $P(a, b)$ を双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ 上にある第 1 象限内の点とする。 $a = \frac{e^s + e^{-s}}{2}$ ($s > 0$) のとき, 線分 OP と双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を, s を用いて表せ。

(解説)

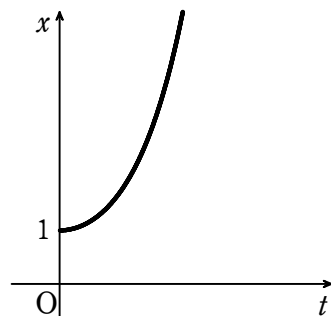
$$(1) x = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, x' = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{e^{-t}(e^{2t} - 1)}{2}, x'' = \frac{e^t + e^{-t}}{2} > 0$$

$x' = 0$ とすると, $t = 0$

x の増減凹凸表は右図

よって, グラフは右図

t	0	...
x'	0	+
x''	+	+
x	1	↗



$$(2) x^2 - 1 = \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} - 1 = \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right)^2$$

$$t \geq 0 \text{ において } \frac{(e^t - e^{-t})}{2} \geq 0 \text{ より}$$

$$\sqrt{x^2 - 1} = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

$$(3) x^2 - y^2 = 1, y \geq 0 \text{ より, } y = \sqrt{x^2 - 1}$$

求める面積を S とすると

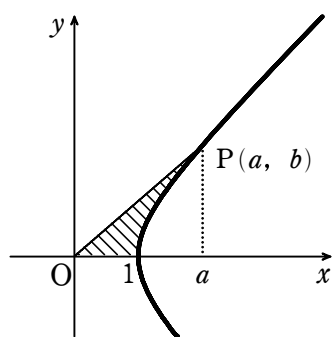
$$S = \frac{1}{2}ab - \int_1^a \sqrt{x^2 - 1} dx$$

ここで,

$$b = \sqrt{a^2 - 1} = \frac{e^s - e^{-s}}{2}$$

$$x = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \text{ とおくと, (2)より}$$

$$\sqrt{x^2 - 1} = \frac{e^t - e^{-t}}{2}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$



(1)より, $x = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$ ($t \geq 0$) は単調増加し,

x と t の対応は右図

x	$1 \rightarrow a$
t	$0 \rightarrow s$

よって

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^s + e^{-s}}{2} \cdot \frac{e^s - e^{-s}}{2} - \int_0^s \frac{e^t - e^{-t}}{2} \cdot \frac{e^t - e^{-t}}{2} dt \\
 &= \frac{e^{2s} - e^{-2s}}{8} - \frac{1}{4} \int_0^s (e^{2t} - 2 + e^{-2t}) dt \\
 &= \frac{e^{2s} - e^{-2s}}{8} - \frac{1}{4} \left[\frac{e^{2t}}{2} - 2t - \frac{e^{-2t}}{2} \right]_0^s \\
 &= \frac{e^{2s} - e^{-2s}}{8} - \frac{1}{4} \left(\frac{e^{2s}}{2} - 2s - \frac{e^{-2s}}{2} \right) = \frac{s}{2}
 \end{aligned}$$

【注】例2, 補1 は, 双曲線と x 軸とで囲む部分の面積を求める問題である。

その際に現れる $\int \sqrt{x^2 - 1} dx$ の積分は, 特殊な置換をしないと求まらない。2通りの置換の方法で積分を求めている。他にも不定積分の結果の導関数を求めさせて, 積分を求めさせる形式の問題もある。

補2

曲線 $x^2 - 2xy + 2y^2 = 4$ について、 x のとりうる値の範囲は ア であり、 y の最大値は イ である。また、 y が最小値となるときの x の値は ウ で、この曲線で囲まれる部分の面積は エ である。

(解説)

曲線の方程式を、 y の2次方程式

$$2y^2 - 2xy + x^2 - 4 = 0 \dots \text{①}$$

とみて、判別式を D_y とすると、 $D_y \geq 0$ のとき

$$(-x)^2 - 2(x^2 - 4) \geq 0$$

$$x^2 - 8 \leq 0$$

$$\therefore \text{ア} -2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$$

また、曲線の方程式を、 x の2次方程式

$$x^2 - 2yx + 2(y^2 - 2) = 0 \dots \text{②}$$

とみて、判別式を D_x とすると、 $D_x \geq 0$ のとき

$$(-y)^2 - 2(y^2 - 2) \geq 0$$

$$y^2 - 4 \leq 0 \quad \therefore -2 \leq y \leq 2$$

ゆえに y の最大値は $\text{イ} 2$

$y = -2$ となるとき、これを②に代入すると

$$x^2 + 4x + 4 = 0$$

$$(x+2)^2 = 0 \quad \text{ウ} x = -2$$

$-2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$ のとき、

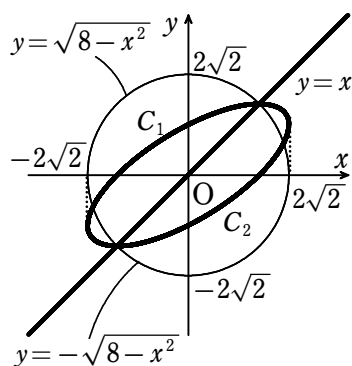
①を y について解くと

$$y = \frac{x \pm \sqrt{8-x^2}}{2}$$

求める面積は

$$\int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left(\frac{x + \sqrt{8-x^2}}{2} - \frac{x - \sqrt{8-x^2}}{2} \right) dx$$

$$= \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \sqrt{8-x^2} dx = \frac{1}{2} \times \pi \cdot (2\sqrt{2})^2 = \text{エ} 4\pi$$



$$C_1: y = \frac{x + \sqrt{8-x^2}}{2}$$

$$C_2: y = \frac{x - \sqrt{8-x^2}}{2}$$

補3

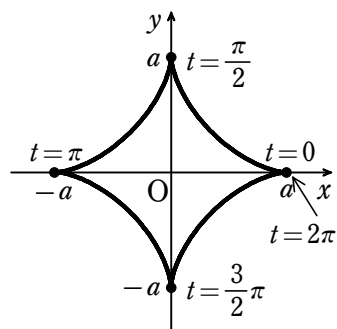
(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt$ を求めよ.

(2) 定積分 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$ ($n=0, 1, 2, \dots$)

は, n で表される係数 k_n を用いて $I_n = k_n I_{n-2}$ ($n \geq 2$) と表すことができる. k_n を求めよ.

(3) a を正の定数とする. 曲線 $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$

($0 \leq t \leq 2\pi$) は図のようになる. この曲線の囲む部分の面積を求めよ.



解説

$$(1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left[t - \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$(2) I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} t \sin t dt$$

$$= - \left[\sin^{n-1} t \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} t \cos^2 t dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n-2} t - \sin^n t) dt = (n-1)(I_{n-2} - I_n)$$

よって

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad \therefore k_n = \frac{n-1}{n}$$

(3) $a \cos^3(2\pi - t) = a \cos^3 t = x$, $a \sin^3(2\pi - t) = -a \sin^3 t = -y$ より

曲線は x 軸に関して対称

$a \cos^3(\pi - t) = -a \cos^3 t = -x$, $a \sin^3(\pi - t) = a \sin^3 t = y$ より

曲線は y 軸に関して対称である

よって, この曲線の囲む部分の面積を S とすると

$$S = 4 \int_0^a y dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sin^3 t \cdot 3a \cos^2 t (-\sin t) dt$$

$$= 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 t \cos^2 t dt = 12a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^4 t - \sin^6 t) dt = 12a^2 (I_4 - I_6)$$

(1), (2)から, $I_6 = \frac{5}{6}I_4, I_4 = \frac{3}{4}I_2, I_2 = \frac{\pi}{4}$ より

$$S = 12a^2 \times \frac{1}{6}I_4 = 12a^2 \times \frac{1}{6} \times \frac{3}{4} \times \frac{\pi}{4} = \frac{3}{8}\pi a^2$$

参考 $a > 0$, t を媒介変数として, 方程式 $x = a\cos^3 t, y = a\sin^3 t$ で表される曲線をアステロイドという。

補4

図1は原点 O を中心とする半径1の円と、その外周に右回りに巻き付けた糸をたるまないようにほどいたときの糸の端点 Q の軌跡を太線で示したものである。端点 Q は、はじめ座標 $(1, 0)$ にあるものとする。糸の太さや伸びは考えないものとする。

- (1) 糸と円の接点を P とする。このとき線分 PQ は点 P における円の接線の一部である。線分 OP と x 軸とのなす角を θ とするとき、接線の方程式を求めよ。
- (2) 端点 Q の座標 (x, y) を θ を用いて表せ。
- (3) $0 \leq \theta \leq \pi$ における端点 Q の軌跡と、 x 軸および $\theta = \pi$ における糸で囲まれた部分(図2の斜線部分)の面積を求めよ。

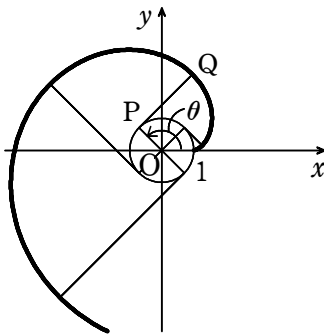


図1

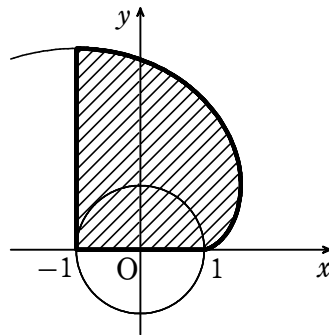


図2

解説

- (1) $P(\cos \theta, \sin \theta)$ より、接線の方程式は

$$x \cos \theta + y \sin \theta = 1$$

- (2) (1)より、 $\overrightarrow{PQ} \parallel (\sin \theta, -\cos \theta)$

$A(1, 0)$ とすると、 $|\overrightarrow{PQ}| = \widehat{AP} = \theta$ より

$$\overrightarrow{PQ} = \theta(\sin \theta, -\cos \theta)$$

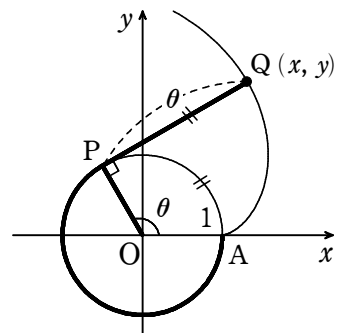
$$= (\theta \sin \theta, -\theta \cos \theta)$$

$$\overrightarrow{OP} = (\cos \theta, \sin \theta)$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$$

$$= (\cos \theta + \theta \sin \theta, \sin \theta - \theta \cos \theta)$$

$$\therefore Q(\cos \theta + \theta \sin \theta, \sin \theta - \theta \cos \theta)$$



(3) $\theta = \pi$ のとき $Q(-1, \pi)$

求める面積 S は

$$S = \int_0^\pi \{x - (-1)\} dy$$

$x = \cos \theta + \theta \sin \theta$, $y = \sin \theta - \theta \cos \theta$ から

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos \theta - \cos \theta + \theta \sin \theta = \theta \sin \theta \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\pi (\cos \theta + \theta \sin \theta + 1) \theta \sin \theta d\theta \\ &= \int_0^\pi \theta \sin \theta \cos \theta d\theta + \int_0^\pi \theta^2 \sin^2 \theta d\theta + \int_0^\pi \theta \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \theta \sin \theta \cos \theta d\theta &= \int_0^\pi \frac{1}{2} \theta \sin 2\theta d\theta \\ &= \left[-\frac{1}{4} \theta \cos 2\theta \right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{1}{4} \cos 2\theta d\theta = -\frac{\pi}{4} + \left[\frac{1}{8} \sin 2\theta \right]_0^\pi = -\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \theta^2 \sin^2 \theta d\theta &= \int_0^\pi \frac{1}{2} \theta^2 (1 - \cos 2\theta) d\theta \\ &= \int_0^\pi \frac{1}{2} \theta^2 d\theta - \int_0^\pi \frac{1}{2} \theta^2 \cos 2\theta d\theta \\ &= \left[\frac{1}{6} \theta^3 \right]_0^\pi - \left[\frac{1}{4} \theta^2 \sin 2\theta \right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{1}{2} \theta \sin 2\theta d\theta \\ &= \frac{\pi^3}{6} + \int_0^\pi \frac{1}{2} \theta \sin 2\theta d\theta = \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\int_0^\pi \theta \sin \theta d\theta = \left[-\theta \cos \theta \right]_0^\pi + \int_0^\pi \cos \theta d\theta = \pi + \left[\sin \theta \right]_0^\pi = \pi$$

より

$$S = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi^3}{6} - \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{\pi^3}{6} + \frac{\pi}{2}$$

参考 本問の Q の描く曲線をインボリュートという。

