

4.4 Cauchy—Schwarzの不等式

(1) コーシー・シュワルツの不等式

相加相乗平均の不等式で学んだように、不等式は、最大最小問題と相性がよい。次のコーシー・シュワルツの不等式も知っておくと最大最小問題が簡単に解けることがある。

コーシー・シュワルツの不等式

a, b, c, x, y, z が実数のとき、

$$1. (a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$

等号成立は $ax = by$ のとき

$$2. (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$$

等号成立は $ay = bx, bz = cy, cx = az$ のとき

1のみ示しておく

$$\begin{aligned}(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 &= a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 \\ &= (ay - bx)^2 \geq 0\end{aligned}$$

等号成立は $ay = bx$ のとき

☞ $a, b \neq 0$ のときは $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ のとき、とできて記憶しやすいが、

$a = 0$ または $b = 0$ という場合もあるので、その場合を考えると、

$a = 0, b = 0$ のとき、常に等号成立、

$a = 0, b \neq 0$ のとき、 $x = 0$ のとき等号成立

$a \neq 0, b = 0$ のとき、 $y = 0$ のとき等号成立

と場合分けが必要になるので、等号成立は $ay = bx$ のとき、で止めておいた方がよい。あえて書くのであれば、

等号成立は $\frac{x}{a} = \frac{y}{b}$ のとき

ただし、 $a = 0$ のときは $x = 0$ 、 $b = 0$ のときは $y = 0$ などと書けばよい。

この不等式は、ベクトルの内積を学んだ人であれば簡単に記憶できる。

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積は $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ であるから、 $-1 \leq \cos \theta \leq 1$ より

$$-|\vec{a}| |\vec{b}| \leq \vec{a} \cdot \vec{b} \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

$$\therefore |\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \quad \therefore (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 \leq |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2$$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ とすれば,

$\vec{a} \cdot \vec{b} = ax + by, |\vec{a}| = \sqrt{a^2 + b^2}, |\vec{b}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ より

$$(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$

となる。

例1

以下の問いに答えよ。ただし、文字はすべて実数を表す。

(1) 次の不等式を証明せよ。

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq |ax + by + cz|$$

(2) 次の不等式を証明せよ。

$$10(2a^2 + 3b^2 + 5c^2) \geq (2a + 3b + 5c)^2$$

解説

(1) $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq 0, |ax + by + cz| \geq 0$ であるから

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$$

を示せばよい。

$$\begin{aligned} & (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - |ax + by + cz|^2 \\ &= a^2(x^2 + y^2 + z^2) + b^2(x^2 + y^2 + z^2) + c^2(x^2 + y^2 + z^2) \\ &\quad - (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + 2abxy + 2bcyz + 2cazx) \\ &= (a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2) + (b^2z^2 - 2bcyz + c^2y^2) + (c^2x^2 - 2cazx + a^2z^2) \\ &= (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \geq |ax + by + cz|$$

等号成立は、 $ay = bx$ かつ $bz = cy$ かつ $cx = az$ のとき

(2) (1) の不等式で $a = \sqrt{2}, b = \sqrt{3}, c = \sqrt{5}, x = \sqrt{2}a, y = \sqrt{3}b, z = \sqrt{5}c$ とすると

$$\sqrt{2+3+5} \sqrt{2a^2+3b^2+5c^2} \geq |\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}a + \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}b + \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}c|$$

$$\sqrt{10} \sqrt{2a^2+3b^2+5c^2} \geq |2a+3b+5c|$$

$$\therefore 10(2a^2+3b^2+5c^2) \geq (2a+3b+5c)^2$$

等号成立は、 $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}b = \sqrt{3} \cdot \sqrt{2}a$ かつ $\sqrt{3} \cdot \sqrt{5}c = \sqrt{5} \cdot \sqrt{3}b$ かつ

$\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}a = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5}c$, すなわち、 $a = b = c$ のとき

例2

以下の問いに答えよ.

(1) 実数 x, y が $x+y=1$ を満たすとき, 不等式 $x^2+y^2 \geq \frac{1}{2}$ が成り立つことを証明せよ. また, 等号が成り立つのはどのようなときか.

(2) 実数 x, y, z が $x+y+z=1$ を満たすとき, 不等式 $x^2+y^2+z^2 \geq \frac{1}{3}$ が成り立つことを証明せよ. また, 等号が成り立つのはどのようなときか.

(3) n は自然数とする. 実数 $x_1, x_2, \dots, x_n$ が $x_1+x_2+\dots+x_n=1$ を満たすとき, 不等式 $x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2 \geq \frac{1}{n}$ が成り立つことを証明せよ. また, 等号が成り立つのはどのようなときか.

解説

(1) コーシー・シュワルツの不等式より

$$(1^2+1^2)(x^2+y^2) \geq (1 \cdot x + 1 \cdot y)^2$$

$$\therefore x^2+y^2 \geq \frac{1}{2}$$

等号成立は, $x=y=\frac{1}{2}$ のとき

(2) コーシー・シュワルツの不等式より

$$(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2) \geq (1 \cdot x + 1 \cdot y + 1 \cdot z)^2$$

$$\therefore x^2+y^2+z^2 \geq \frac{1}{3}$$

等号成立は, $x=y=z=\frac{1}{3}$ のとき

(3) コーシー・シュワルツの不等式より

$$(1^2+1^2+\dots+1^2)(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2) \geq (1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + \dots + 1 \cdot x_n)^2$$

$$\therefore x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2 \geq \frac{1}{n}$$

等号成立は, $x_1=x_2=\dots=x_n=\frac{1}{n}$ のとき

例3

a, b, c, x, y, z を実数とする。

(1) $(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$ が成り立つことを示せ。

(2) $x + y + z = 1$ のとき, $x^2 + y^2 + z^2$ の最小値を求めよ。

(解説)

$$\begin{aligned}
 (1) & (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) - (ax + by + cz)^2 \\
 &= a^2x^2 + a^2y^2 + a^2z^2 + b^2x^2 + b^2y^2 + b^2z^2 + c^2x^2 + c^2y^2 + c^2z^2 - a^2x^2 \\
 &\quad - b^2y^2 - c^2z^2 - 2abxy - 2bcyz - 2cazx \\
 &= a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 + b^2z^2 - 2bcyz + c^2y^2 + c^2x^2 - 2cazx + a^2z^2 \\
 &= (ay - bx)^2 + (bz - cy)^2 + (cx - az)^2 \geq 0 \\
 \therefore & (a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2
 \end{aligned}$$

[注] この問題では必要ないが,

等号成立は, $ay = bx, bz = cy, cx = az$ のとき

これも, $a, b, c \neq 0$ のときは, $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ のときとできる。

(2) (1) の不等式で $a = b = c = 1$ とおくと

$$3(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x + y + z)^2 = 1$$

$$\therefore x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{1}{3}$$

等号成立は, $y = x$ かつ $z = y$ かつ $x = z$, すなわち, $x = y = z$ のとき

このとき, $x + y + z = 1$ より, $x = y = z = \frac{1}{3}$

よって, 最小値は $\frac{1}{3}$

例4

(1) a, b, c を $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ を満たす実数とするとき, $a + b + c$ の最大値を求めよ。

(2) $x > 0, y > 0, z > 0$ とする。 $\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{1}{4}$ のとき, $x + 2y + 3z$ の最小値を求めよ。

(解説)

(1) コーシー・シュワルツの不等式より

$$(1^2 + 1^2 + 1^2)(a^2 + b^2 + c^2) \geq (1 \cdot a + 1 \cdot b + 1 \cdot c)^2$$

$$3(a^2 + b^2 + c^2) \geq (a + b + c)^2$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \text{ より}$$

$$(a + b + c)^2 \leq 3$$

$$\therefore -\sqrt{3} \leq a + b + c \leq \sqrt{3}$$

$$a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ のとき, } a + b + c = \sqrt{3} \text{ をとる}$$

よって, 最大値は $\sqrt{3}$

(2) コーシー・シュワルツの不等式より

$$\{(\sqrt{x})^2 + (\sqrt{2y})^2 + (\sqrt{3z})^2\} \times \left\{ \left(\sqrt{\frac{1}{x}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{2}{y}} \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{z}} \right)^2 \right\}$$

$$\geq \left(\sqrt{x} \cdot \sqrt{\frac{1}{x}} + \sqrt{2y} \cdot \sqrt{\frac{2}{y}} + \sqrt{3z} \cdot \sqrt{\frac{3}{z}} \right)^2$$

$$(x + 2y + 3z) \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} \right) \geq (1 + 2 + 3)^2$$

$$(x + 2y + 3z) \cdot \frac{1}{4} \geq 6^2$$

$$\therefore x + 2y + 3z \geq 144$$

$$\text{等号成立は, } x = y = z \text{ かつ } \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{1}{4},$$

すなわち, $x = y = z = 24$ のとき

よって, 最小値は 144

別解 相加相乗平均でも解ける。

$$(x + 2y + 3z) \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} \right) = 14 + 2 \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + 6 \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z} \right) + 3 \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{1}{4} \text{ より}$$

$$x + 2y + 3z = 4 \left\{ 14 + 2 \left(\frac{y}{x} + \frac{x}{y} \right) + 6 \left(\frac{z}{y} + \frac{y}{z} \right) + 3 \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \right) \right\}$$

$x > 0, y > 0, z > 0$ であるから, 相加相乗平均の大小関係より

$$\geq 4(14 + 2 \cdot 2 + 6 \cdot 2 + 3 \cdot 2) = 144$$

等号成立は, $\frac{y}{x} = \frac{x}{y}, \frac{z}{y} = \frac{y}{z}, \frac{x}{z} = \frac{z}{x}$, すなわち, $x = y = z$ のとき

$$\text{このとき, } \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{3}{z} = \frac{1}{4} \text{ より, } \frac{6}{x} = \frac{1}{4} \therefore x = y = z = 24$$

よって, 最小値は 144

例5

正の実数 a, b, c が $a+5b+7c=12$ を満たすとする。

(1) 実数 p, q, r, x, y, z に対して、

$(px+qy+rz)^2+(py-qx)^2+(qz-ry)^2+(rx-pz)^2$ を因数分解せよ。

(2) 実数 p, q, r, x, y, z に対して、不等式

$$(p^2+q^2+r^2)(x^2+y^2+z^2)\geq(px+qy+rz)^2$$

が成り立つことを示せ。また、等号が成り立つのはどのようなときか。

(3) $\sqrt{a}+\sqrt{5b}+\sqrt{7c}$ の最大値を求めよ。

解説

(1), (2)は省略。

(3) (2)において、 $p=q=r=1, x=\sqrt{a}, y=\sqrt{5b}, z=\sqrt{7c}$ として

$$3(a+5b+7c)\geq(\sqrt{a}+\sqrt{5b}+\sqrt{7c})^2$$

$$(\sqrt{a}+\sqrt{5b}+\sqrt{7c})^2\leq 36$$

$$\therefore 0<\sqrt{a}+\sqrt{5b}+\sqrt{7c}\leq 6$$

等号成立は、 $\sqrt{a}=\sqrt{5b}=\sqrt{7c}$ ，すなわち、 $a=5b=7c$ のとき

$a+5b+7c=12$ より、 $a=5b=7c=4 \quad \therefore a=4, b=\frac{4}{5}, c=\frac{4}{7}$ のとき

よって、最大値は 6

例6

(1) 正の実数 x, y に対して $\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geq 2$ が成り立つことを示し、等号が成立するための条件を求めよ。

(2) n を自然数とする。 n 個の正の実数 $a_1, \dots, a_n$ に対して

$$(a_1+\dots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}\right)\geq n^2$$

が成り立つことを示し、等号が成立するための条件を求めよ。

解説

(1) $x>0, y>0$ であるから、相加相乗平均の大小関係より

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\geq 2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=2$$

等号成立は、 $\frac{y}{x}=\frac{x}{y}$ すなわち $x=y$ のとき

(2) $n=1$ のとき

左辺 $= a_1 \cdot \frac{1}{a_1} = 1$, 右辺 $= 1^2 = 1$ より成り立つ

$n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} & (a_1 + \cdots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right) \\ &= a_1 \left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right) + a_2 \left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right) + \cdots + a_n \left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right) \\ &= \left(1 + \frac{a_1}{a_2} + \cdots + \frac{a_1}{a_n} \right) + \left(\frac{a_2}{a_1} + 1 + \cdots + \frac{a_2}{a_n} \right) + \cdots + \left(\frac{a_n}{a_1} + \frac{a_n}{a_2} + \cdots + 1 \right) \\ &= n + \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} \right) + \cdots + \left(\frac{a_i}{a_j} + \frac{a_j}{a_i} \right) + \left(\frac{a_{n-1}}{a_n} + \frac{a_n}{a_{n-1}} \right) \\ & \hspace{15em} (\text{ただし, } 1 \leq i < j \leq n) \end{aligned}$$

(1)より

$$\geq n + \frac{n(n-1)}{2} \cdot 2 = n^2$$

等号成立は,

$n=1$ のとき, 常に成り立つ。

$n \geq 2$ のとき, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$

別解 コーシー・シュワルツの不等式でも解ける。

コーシー・シュワルツの不等式より

$$\begin{aligned} & (x_1 + x_2 + \cdots + x_n)(y_1 + y_2 + \cdots + y_n) \geq (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n)^2 \\ & x_i = a_i, \quad y_j = \frac{1}{a_j} \quad (i=1, 2, \dots, n) \text{ とすると,} \end{aligned}$$

$$(a_1 + \cdots + a_n) \left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \right) \geq n^2$$

例7

すべての正の実数 x, y に対し, $\sqrt{x} + \sqrt{y} \leq k\sqrt{2x+y}$ が成り立つような実数 k の最小値を求めよ.

(解説)

コーシー・シュワルツの不等式より

$$(ax + by)^2 \leq (a^2 + b^2)(x^2 + y^2)$$

ここで, $a = \frac{1}{\sqrt{2}}, b = 1, x = \sqrt{2x}, y = \sqrt{y}$ とおくと

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 \leq \frac{3}{2}(2x + y)$$

$$\therefore 0 < \sqrt{x} + \sqrt{y} \leq \frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{2x+y}$$

等号成立は, $2\sqrt{x} = \sqrt{y}$ のとき

k の最小値は $\frac{\sqrt{6}}{2}$

補1

(1) 実数 x_i, y_i を係数とする n 個の t の 2 次式 $(x_i t - y_i)^2 = x_i^2 t^2 - 2x_i y_i t + y_i^2, i=1, 2, \dots, n$ を用いて, 不等式

$(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)$ が成り立つことを示せ.

(2) 実数 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 が $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 10, a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 25$ を満たすとき, a_5 の最大値を求めよ.

解説

(1) $(x_i t - y_i)^2 = x_i^2 t^2 - 2x_i y_i t + y_i^2, i=1, 2, \dots, n$ の辺々を加えて

$$(x_1^2 + \dots + x_n^2)t^2 - 2(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)t + (y_1^2 + \dots + y_n^2) \\ = (x_1 t - y_1)^2 + \dots + (x_n t - y_n)^2 \geq 0$$

(i) $x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0$ のとき

$x_1, \dots, x_n$ は実数であるから, $x_1 = \dots = x_n = 0$ より等号が成立するので成り立つ

(ii) $x_1^2 + \dots + x_n^2 \neq 0$ のとき

$(x_1^2 + \dots + x_n^2)t^2 - 2(x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)t + (y_1^2 + \dots + y_n^2) = 0$ を t の 2 次方程式と見て, 判別式を D とすると,

$$\frac{D}{4} = (x_1 y_1 + \dots + x_n y_n)^2 - (x_1^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + \dots + y_n^2) \leq 0$$

$\therefore (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n)^2 \leq (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2)$
不要ですが, 等号成立は, $x_1 t - y_1 = \dots = x_n t - y_n = 0$ のときです。

等号成立は, $\frac{y_1}{x_1} = \dots = \frac{y_n}{x_n}$ のとき。ただし, $x_i = 0$ のとき $y_i = 0$ とも表せます。

これがコーシー・シュワルツの不等式の一般形の証明です。

(2) $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 10, a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 + a_5^2 = 25$ より

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 10 - a_5, a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2 = 25 - a_5^2$$

(1)の不等式より

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2)$$

$b_1 = b_2 = b_3 = b_4 = 1$ として

$$(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)^2 \leq 4(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)$$

$$(10 - a_5)^2 \leq 4(25 - a_5^2)$$

$$5a_5^2 - 20a_5 \leq 0 \quad \therefore 0 \leq a_5 \leq 4$$

$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = \frac{3}{2}$ のとき, $a_5 = 4$ をとるから

最大値は 4