

4.3 相加相乗平均の不等式

(1) 相加相乗平均の不等式

2つの実数 a, b について, $\frac{a+b}{2}$ を, a と b の相加平均という。また, $a > 0, b > 0$ のとき, $\sqrt{ab}$ を a と b の相乗平均という。
この2つの平均の間には, 次のような大小関係がある。

相加相乗平均の不等式

$a > 0, b > 0$ のとき,

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

等号が成り立つのは $a = b$ のとき

例1

(1) 2つの正の数 x_1 と x_2 について, その相加平均 H_2 と相乗平均 G_2 との間に, 次の関係があることを証明せよ。

$$H_2 \geq G_2 \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \geq \sqrt{x_1 x_2}$$

(2) 4つの正の数 x_1, x_2, x_3, x_4 について, その相加平均 H_4 と相乗平均 G_4 との間に, 次の関係があることを証明せよ。

$$H_4 \geq G_4 \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \geq \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4}$$

(3) (2)において, $x_4 = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$ とおくことにより, 3つの正の数 x_1, x_2, x_3 について, その相加平均 H_3 と相乗平均 G_3 との間に, 次の関係があることを証明せよ。

$$H_3 \geq G_3 \quad \text{すなわち} \quad \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \geq \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$$

解説

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{1}{2}(x_1 + x_2) - \sqrt{x_1 x_2} &= \frac{1}{2}\{(\sqrt{x_1})^2 - 2\sqrt{x_1}\sqrt{x_2} + (\sqrt{x_2})^2\} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2})^2 \geq 0 \end{aligned}$$

$$\therefore \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \geq \sqrt{x_1 x_2}$$

等号成立は、 $x_1 = x_2$ のとき

(2), (3)は、指数関数を学習してからでよい。

$$\begin{aligned}(2) \quad \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}(x_3 + x_4) \right\} \\ &\geq \frac{1}{2}(\sqrt{x_1 x_2} + \sqrt{x_3 x_4}) \quad ((1)より) \\ &\geq \sqrt{\sqrt{x_1 x_2} \sqrt{x_3 x_4}} \quad ((1)より) \\ &= \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4}\end{aligned}$$

等号成立は、 $(x_1 = x_2 \text{ かつ } x_3 = x_4)$ かつ $(\sqrt{x_1 x_2} = \sqrt{x_3 x_4})$,
すなわち、 $x_1 = x_2 = x_3 = x_4$ のとき

$$\begin{aligned}(3) \quad \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) &\geq \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 x_4} \text{ において, } x_4 = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \text{ とおくと} \\ \frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}) &\geq \sqrt[4]{x_1 x_2 x_3 \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}} \\ &= \sqrt[4]{(\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3})^3 \cdot \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}} \\ &= \sqrt[4]{(\sqrt[3]{x_1 x_2 x_3})^4} \\ &= \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}\end{aligned}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3} \geq 4 \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$$

$$\therefore \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) \geq \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$$

等号成立は、 $x_1 = x_2 = x_3 = \sqrt[3]{x_1 x_2 x_3}$, すなわち、 $x_1 = x_2 = x_3$ のとき

【参考】 一般に $H_n \geq G_n$ も成り立つが、現段階では証明は難しいので、後に扱う。

例2

a, b, c を正の数とすると、次の各不等式が成り立つことを示せ。
また、等号が成立するのはどのような場合か。

$$(1) \quad a + \frac{1}{a} \geq 2$$

$$(2) \quad \left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{4}{a}\right) \geq 9$$

$$(3) \quad \left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{4}{c}\right) \left(c + \frac{9}{a}\right) \geq 48$$

【解説】

(1) 相加相乗平均より

$$a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a \times \frac{1}{a}} = 2$$

等号成立は、 $a = \frac{1}{a}$ より、 $a = 1$ のとき

$$(2) \left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{4}{a}\right) = ab + \frac{4}{ab} + 5 \geq 2\sqrt{ab \times \frac{4}{ab}} + 5 = 9$$

等号成立は、 $ab = \frac{4}{ab}$ より、 $ab = 2$ のとき

$$\begin{aligned} (3) & \left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{4}{c}\right) \left(c + \frac{9}{a}\right) \\ &= \left(4a + \frac{9}{a}\right) + \left(9b + \frac{4}{b}\right) + \left(c + \frac{36}{c}\right) + \left(abc + \frac{36}{abc}\right) \\ &\geq 2\sqrt{4a \times \frac{9}{a}} + 2\sqrt{9b \times \frac{4}{b}} + 2\sqrt{c \times \frac{36}{c}} + 2\sqrt{abc \times \frac{36}{abc}} \\ &= 12 + 12 + 12 + 12 = 48 \end{aligned}$$

等号成立は、 $4a = \frac{9}{a}$, $9b = \frac{4}{b}$, $c = \frac{36}{c}$, $abc = \frac{36}{abc}$ より、

$a = \frac{3}{2}$, $b = \frac{2}{3}$, $c = 6$ のとき

例3

$a > 0$, $b > 0$ のとき、 $\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{4}{a}\right)$ の最小値は である。

解説

$$\left(a + \frac{1}{b}\right) \left(b + \frac{4}{a}\right) = ab + \frac{4}{ab} + 5$$

$ab > 0$ であるから、相加相乗平均の大小関係より

$$ab + \frac{4}{ab} + 5 \geq 2\sqrt{ab \cdot \frac{4}{ab}} + 5 = 9$$

等号成立は、 $ab = \frac{4}{ab}$, すなわち、 $ab = 2$ のとき

このとき、最小値をとり、最小値は 9

注 $a, b > 0$ より

$$a + \frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}, b + \frac{4}{a} \geq 4\sqrt{\frac{b}{a}} \cdots \textcircled{1}$$

辺々かけて,

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right) \geq 8 \dots \textcircled{2}$$

よって, 最小値は 8 としたら誤り。

$\left(a + \frac{1}{b}\right)\left(b + \frac{4}{a}\right)$ は 9 以上の値をとるから, $\textcircled{2}$ の不等式は偽ではないが,

①の不等式の等号成立条件が $a = \frac{1}{b}$ すなわち $ab = 1$ と $b = \frac{4}{a}$ すなわち $ab = 4$ であり, これらを同時に満たすことはないので, ②の等号が成り立つことはなく, 最小値を 8 としてはならない。

例4

a, b, c を正の数とすると, $\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$ のとりうる最小の値を求めよ。

解説

$a > 0, b > 0, c > 0$ であるから, 相加相乗平均の大小関係より

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}, \quad b + c \geq 2\sqrt{bc}, \quad c + a \geq 2\sqrt{ca}$$

(等号成立は, それぞれ $a = b, b = c, c = a$ のとき)

よって

$$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc} \geq 8$$

等号成立は, $a = b = c$ のとき

このとき, 最小値をとり, 最小値は 8

例5

$x > 0$ のとき, $x + \frac{1}{x}$ の最小値は $\sqrt{\quad}$ であり, $x > 1$ のとき, $x + \frac{2}{x-1}$ の最小値は $\sqrt{\quad}$ である。

解説

(1) $x > 0, \frac{1}{x} > 0$ であるから, 相加相乗平均の大小関係より

$$x + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 2$$

等号成立は、 $x = \frac{1}{x}$ ，すなわち、 $x=1$ のとき

このとき、最小値をとり、最小値は⁷2

同様に、 $x > 1$ ， $\frac{2}{x-1} > 0$ であるから

$$x + \frac{2}{x-1} = (x-1) + \frac{2}{x-1} + 1 \geq 2\sqrt{(x-1) \cdot \frac{2}{x-1}} + 1 = 2\sqrt{2} + 1$$

等号成立は、 $x-1 = \frac{2}{x-1}$ ，すなわち $x = 1 + \sqrt{2}$ のとき

このとき、最小値をとり、最小値は¹ $2\sqrt{2} + 1$

例6

(1) $x > 0$ のとき、 $\frac{x^2 - 4x + 3}{x}$ は $x = \boxed{}$ のとき、最小値¹ $\boxed{}$ をとる。

(2) $x > 3$ のとき、 $\frac{x^2 - 6x + 13}{x-3}$ の最小値と、そのときの x の値を求めよ。

解説

$$(1) \frac{x^2 - 4x + 3}{x} = x - 4 + \frac{3}{x}$$

相加相乗平均の大小関係より

$$x - 4 + \frac{3}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{3}{x}} - 4 = 2\sqrt{3} - 4$$

等号成立は、 $x = \frac{3}{x}$ すなわち $x = \sqrt{3}$ のとき

よって、 $x = \sqrt{3}$ のとき最小値¹ $2\sqrt{3} - 4$ をとる

$$(2) \frac{x^2 - 6x + 13}{x-3} = \frac{(x-3)^2 + 4}{x-3} = x - 3 + \frac{4}{x-3}$$

$x - 3 > 0$ であるから、相加相乗平均の大小関係より

$$x - 3 + \frac{4}{x-3} \geq 2\sqrt{(x-3) \cdot \frac{4}{x-3}} = 4$$

等号成立は、 $x - 3 = \frac{4}{x-3}$ すなわち $x = 5$ のとき

よって、 $x = 5$ のとき最小値 4 をとる

例7 x が正の数のとき

(1) $x + \frac{16}{x}$ の最小値は ^ア であり, $x + \frac{16}{x+2}$ の最小値は ^イ である.

(2) $\frac{x}{x^2+16}$ の最大値は ^ウ であり, このときの x の値は ^エ

である. また, $\frac{x+2}{x^2+2x+16}$ の最大値は ^オ であり, このときの x の値は ^カ である.

解説

(1) $x > 0$ であるから, 相加相乗平均の大小関係より

$$x + \frac{16}{x} \geq 2\sqrt{x \times \frac{16}{x}} = 8$$

等号成立は, $x = \frac{16}{x}$ すなわち $x = 4$ のとき

このとき, 最小値をとり, 最小値は ^ア8

$x+2 > 0$ であるから, 同様に

$$x + \frac{16}{x+2} = (x+2) + \frac{16}{x+2} - 2 \geq 2\sqrt{(x+2) \times \frac{16}{x+2}} - 2 = 6$$

等号成立は, $x+2 = \frac{16}{x+2}$ すなわち $x = 2$ のとき

このとき, 最小値をとり, 最小値は ^イ6

(2) $x > 0$ であるから

$$\frac{x}{x^2+16} = \frac{1}{x + \frac{16}{x}} \leq \frac{1}{8}$$

等号成立は, $x = 4$ のとき

よって, $x = \text{エ} 4$ のとき, 最大値 ^ウ $\frac{1}{8}$ をとる

同様にして

$$\frac{x+2}{x^2+2x+16} = \frac{1}{x + \frac{16}{x+2}} \leq \frac{1}{6}$$

等号成立は, $x = 2$ のとき

最大値は、 $x = {}^{\text{カ}}2$ のとき $\frac{1}{6}$

次の2つの例は、指数関数を学習してからでよい。

例8

実数 a, b が $a > -1, b > -2$ であるとき、次の式の最小値を求めよ。

$$2b + \frac{2}{a+1} + \frac{2a+2}{b+2}$$

解説

$$2b + \frac{2}{a+1} + \frac{2a+2}{b+2} = 2 \left(b + \frac{1}{a+1} + \frac{a+1}{b+2} \right)$$

$$= 2 \left\{ (b+2) + \frac{1}{a+1} + \frac{a+1}{b+2} - 2 \right\}$$

$a+1 > 0, b+2 > 0$ であるから、相加相乗平均の大小関係より

$$\geq 2 \left(3 \sqrt[3]{(b+2) \cdot \frac{1}{a+1} \cdot \frac{a+1}{b+2}} - 2 \right) = 2(3 \cdot 1 - 2) = 2$$

等号成立は、 $b+2 = \frac{1}{a+1} = \frac{a+1}{b+2}$ すなわち $a=0, b=-1$ のとき

このとき、最小値をとり、最小値は2

例9

(1) a, b を正の定数とする． $x > 0$ の範囲で、 $\frac{x}{a} + \frac{b}{x}$ の最小値を求めよ．また、そのときの x の値を求めよ．

(2) $x > 0, y > 0, z > 0$ の範囲で、 $\frac{x}{4} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{1}{z}$ の最小値を求めよ．また、そのときの x, y, z の値を求めよ．

解説

(1) $\frac{x}{a} > 0, \frac{b}{x} > 0$ であるから、相加相乗平均の大小関係より

$$\frac{x}{a} + \frac{b}{x} \geq 2 \sqrt{\frac{x}{a} \cdot \frac{b}{x}} = 2 \sqrt{\frac{b}{a}}$$

等号成立は、 $\frac{x}{a} = \frac{b}{x}$ すなわち $x = \sqrt{ab}$ のとき

よって、 $x=\sqrt{ab}$ のとき最小値 $2\sqrt{\frac{b}{a}}$ をとる

(2) (1)より

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{x} \geq \sqrt{y}, \frac{z}{y} + \frac{1}{z} \geq 2\sqrt{\frac{1}{y}}$$

等号成立は、それぞれ $\frac{x}{4} = \frac{y}{x}, \frac{z}{y} = \frac{1}{z}$ すなわち $x^2=4y, z^2=y$ のとき

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{1}{z} \geq \sqrt{y} + 2\sqrt{\frac{1}{y}} \geq 2\sqrt{\sqrt{y} \cdot 2\sqrt{\frac{1}{y}}} = 2\sqrt{2}$$

等号成立は、 $x^2=4y, z^2=y$ かつ $\sqrt{y} = 2\sqrt{\frac{1}{y}}$ すなわち

$y=2, x=2\sqrt{2}, z=\sqrt{2}$ のとき

よって、 $y=2, x=2\sqrt{2}, z=\sqrt{2}$ のとき最小値 $2\sqrt{2}$ をとる

別解

$\frac{x}{4} > 0, \frac{y}{x} > 0, \frac{z}{y} > 0, \frac{1}{z} > 0$ であるから

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{1}{z} \geq 4\sqrt[4]{\frac{x}{4} \cdot \frac{y}{x} \cdot \frac{z}{y} \cdot \frac{1}{z}} = 2\sqrt{2}$$

等号成立は、 $\frac{x}{4} = \frac{y}{x} = \frac{z}{y} = \frac{1}{z}$ すなわち $x=2\sqrt{2}, y=2, z=\sqrt{2}$ のとき

よって、 $y=2, x=2\sqrt{2}, z=\sqrt{2}$ のとき最小値 $2\sqrt{2}$ をとる

補1

(1) 実数 a, b が $a > 0, b > 0, ab = 6$ を満たすとき, $3a + 8b$ の最小値は である。

(2) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}, x > 2, y > 2$ のとき $2x + y$ の最小値を求めよ。

(解説)

(1) $a \neq 0$ であるから, $ab = 6$ より, $b = \frac{6}{a}$

よって

$$3a + 8b = 3a + \frac{48}{a}$$

$3a > 0, \frac{48}{a} > 0$ であるから, 相加相乗平均の大小関係より

$$3a + \frac{48}{a} \geq 2\sqrt{3a \cdot \frac{48}{a}} = 24$$

等号成立は, $3a = \frac{48}{a}$ すなわち $a = 4$ のとき

このとき, 最小値をとり, 最小値は 24

$$(2) \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{x} = \frac{x-2}{2x}$$

$$x > 2, y > 2 \text{ より, } y \geq \frac{2x}{x-2}$$

よって

$$2x + y \geq 2\left(x + \frac{x}{x-2}\right) \cdots \textcircled{1}$$

$$= 2\left(x + 1 + \frac{2}{x-2}\right) = 2\left\{(x-2) + \frac{2}{x-2} + 3\right\}$$

$$\geq 2\left\{2\sqrt{(x-2) \times \frac{2}{x-2}} + 3\right\} = 2(2\sqrt{2} + 3) \cdots \textcircled{2}$$

②の等号は $x-2 = \frac{2}{x-2}$ かつ $x > 2$ すなわち $x = 2 + \sqrt{2}$ のとき,

①の等号は $y = \frac{2x}{x-2}$ のとき成り立つから,

等号成立は $x = 2 + \sqrt{2}$ かつ $y = 2 + 2\sqrt{2}$ のとき

このとき, 最小値をとり, 最小値は $6 + 4\sqrt{2}$

補2

(1) $x \neq 0$ のとき, $\left| \frac{x^2+7x+25}{x} \right|$ の最小値と, 最小値をとる x の値を求めよ。

(2) $x < 1$ のとき, x の関数 $y = x + \frac{1}{x-1}$ の最大値を求めよ. また, そのときの x の値を求めよ.

解説

$$\left| \frac{x^2+7x+25}{x} \right| = \left| x + \frac{25}{x} + 7 \right|$$

(i) $x > 0$ のとき

$x > 0$, $\frac{25}{x} > 0$ であるから, 相加相乗平均の大小関係より

$$x + \frac{25}{x} + 7 \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{25}{x}} + 7 = 17$$

等号成立は, $x = \frac{25}{x}$ すなわち $x = 5$ のとき

$$\text{よって, } \left| x + \frac{25}{x} + 7 \right| \geq 17$$

(ii) $x < 0$ のとき

$x = -t$ とおくと $t > 0$

$$x + \frac{25}{x} + 7 = -\left(t + \frac{25}{t}\right) + 7 \leq -3$$

等号成立は, $t = 5$ すなわち $x = -5$ のとき

$$\text{よって, } \left| x + \frac{25}{x} + 7 \right| \geq 3$$

(i), (ii)より, $x = -5$ のとき最小値 3 をとる

別解

$$x + \frac{25}{x} = k \text{ とおく}$$

両辺に x ($\neq 0$) をかけて

$$x^2 - kx + 25 = 0, x \neq 0$$

$x = 0$ のとき, 対応する k は存在しない

x は実数であるから, 判別式を D とすると

$$D = k^2 - 25 \geq 0 \quad \therefore k \leq -5, k \geq 5$$

この方法は、 $x > 0$ という条件があると解の配置問題となり、むしろ面倒になる。 x が実数全体のときは、判別式のみで終わりなので、こちらの方が簡単である。

(2) $-t = x - 1$ とおくと、 $x = -t + 1, t > 0$

$$x + \frac{1}{x-1} = -t + 1 - \frac{1}{t} = -\left(t + \frac{1}{t}\right) + 1$$

$t > 0, \frac{1}{t} > 0$ であるから、相加相乗平均の大小関係より

$$t + \frac{1}{t} \geq 2\sqrt{t \cdot \frac{1}{t}} = 2$$

等号成立は、 $t = \frac{1}{t}$ ，すなわち、 $t = 1$ のとき

このとき、 $-1 = x - 1 \quad \therefore x = 0$

よって、 $x = 0$ のとき最大値 -1 をとる

補3

x が 0 以上の実数であるとき，関数 $f(x) = \frac{x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 34}{x^2 - x + 3}$ の最小値を求めよ。

(解説)

$$x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 34 = (x^2 - x + 3)(x^2 - x - 5) + 49 \text{ より}$$

$$\frac{x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x + 34}{x^2 - x + 3} = \frac{(x^2 - x + 3)(x^2 - x - 5) + 49}{x^2 - x + 3}$$

$$= (x^2 - x - 5) + \frac{49}{x^2 - x + 3}$$

$$= (x^2 - x + 3) + \frac{49}{x^2 - x + 3} - 8$$

$$x^2 - x + 3 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{11}{4} > 0 \text{ であるから，}$$

相加相乗平均の大小関係より

$$\begin{aligned} (x^2 - x + 3) + \frac{49}{x^2 - x + 3} - 8 &\geq 2\sqrt{(x^2 - x + 3) \cdot \frac{49}{x^2 - x + 3}} - 8 \\ &= 2 \cdot 7 - 8 = 6 \end{aligned}$$

$$\text{等号成立は， } x^2 - x + 3 = \frac{49}{x^2 - x + 3} \text{ すなわち } x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2} \text{ のとき}$$

このとき，最小値をとり，最小値は 6

補4

半径 $\sqrt{2}$ の円に縦の長さ x 、横の長さ y の長方形が内接している。この長方形の面積が最大となるときの x の値とそのときの面積を求めよ。

(解説)

右の図のように、長方形の対角線の長さは外接円の直径の長さに等しい。

三平方の定理より

$$x^2 + y^2 = (2\sqrt{2})^2 = 8$$

また、長方形の面積は xy

$x^2 > 0$ 、 $y^2 > 0$ であるから、相加相乗平均の大小関係より

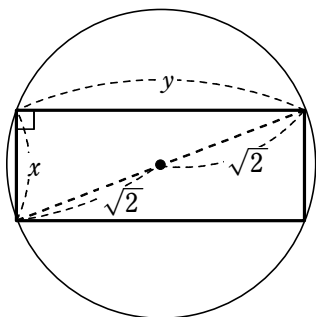
$$x^2 + y^2 \geq 2\sqrt{x^2 y^2} = 2xy \quad (x > 0, y > 0 \text{ より})$$

$$\therefore xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

等号成立は、 $x^2 = y^2$ のときである。

このとき、 $x^2 = 4$ $x > 0$ より、 $x = 2$

よって、 $x = 2$ のとき最大値 4 をとる



補5

直方体の体積を k^3 とし、その直方体の縦、横、高さをそれぞれ、 a 、 b 、 h とする。

(1) 直方体の体積 k^3 と高さ h を固定したとき、対角線の長さの 2 乗の最小値を求めよ。

(2) 体積が k^3 である直方体の中で、対角線の長さが最小となるのは立方体であることを示せ。

解説

$$(1) abh = k^3 \text{ より } ab = \frac{k^3}{h}$$

$a > 0$ 、 $b > 0$ であるから、相加相乗平均の大小関係より

$$a^2 + b^2 + h^2 \geq 2ab + h^2 = \frac{2k^3}{h} + h^2 = \frac{h^3 + 2k^3}{h}$$

等号成立は、 $a = b = \sqrt{\frac{k^3}{h}} = k\sqrt{\frac{k}{h}}$ のとき

よって、最小値は $\frac{h^3 + 2k^3}{h}$

(2) $\frac{h^3 + 2k^3}{h}$ が最小となる場合を考えればよい

$h > 0$ 、 $k > 0$ であるから、相加平均・相乗平均の大小関係より

$$\frac{h^3 + 2k^3}{h} = h^2 + \frac{2k^3}{h} = h^2 + \frac{k^3}{h} + \frac{k^3}{h} \geq 3\sqrt[3]{h^2 \cdot \frac{k^3}{h} \cdot \frac{k^3}{h}} = 3k^2$$

等号成立は、 $h^2 = \frac{k^3}{h}$ すなわち $h = k$ のとき

このとき、 $a = b = k$ となる

よって、対角線の長さが最小となるのは立方体のときである
最後の変形が巧みである。

参考 $x > 0$ のとき、

$$x^2 + \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x} \geq 3\sqrt[3]{x^2 \cdot \frac{1}{2x} \cdot \frac{1}{2x}} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$$

$$x + \frac{1}{x^2} = \frac{x}{2} + \frac{x}{2} + \frac{1}{x^2} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x}{2} \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{x^2}} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$$

等の変形は知っておくとよい。