

4.5 三角不等式

(1) 三角不等式

次の不等式もよく使われる不等式で、三角不等式という。

三角不等式

実数 a, b に対して,

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

等号成立は $ab \geq 0$ のとき

a, b が実数の場合だと、なぜ三角不等式といわれるか分かりにくいですが、ベクトルを学習していれば、 a, b をベクトル $\vec{a}, \vec{b}$ とすると

$$|\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|$$

となり、三角形において、1 辺の長さは他の 2 辺の長さの和より短いという不等式になるので、それが三角不等式といわれる所以である。

例1

a, b, c を実数とするとき、次の不等式を証明せよ。

$$(1) |a + b| \leq |a| + |b|$$

$$(2) |a - b| \leq |a| + |b|$$

$$(3) |a - b| \leq |a - c| + |b - c|$$

解説

$$(1) -|a| \leq a \leq |a|, -|b| \leq b \leq |b| \text{ より}$$

$$-(|a| + |b|) \leq a + b \leq |a| + |b|$$

$$\therefore |a + b| \leq |a| + |b|$$

この問題では必要ないが、

等号成立は、 $(|a| = -a \text{ かつ } |b| = -b)$ または $(|a| = a \text{ かつ } |b| = b)$

すなわち、 $(a \leq 0, b \leq 0)$ または $(a \geq 0, b \geq 0)$

つまり、 $ab \geq 0$ のとき

別解

$|a + b|, |a|, |b| \geq 0$ であるから

$$(a + b)^2 \leq (|a| + |b|)^2$$

を示せばよい

$$(|a|+|b|)^2-(a+b)^2=a^2+2|a||b|+b^2-(a^2+2ab+b^2) \\ =2(|ab|-ab)\geq 0$$

$$\therefore |a+b|\leq |a|+|b|$$

等号成立は、 $|ab|=ab$ すなわち $ab\geq 0$ のとき

(2) (1)において、 $b=-b$ として

$$|a+(-b)|\leq |a|+|-b|$$

$$\therefore |a-b|\leq |a|+|b|$$

等号成立は、 $a\cdot(-b)\geq 0$ すなわち $ab\leq 0$ のとき

(3) (2)において、 $a=a-c, b=b-c$ として

$$|(a-c)-(b-c)|\leq |a-c|+|b-c|$$

$$\therefore |a-b|\leq |a-c|+|b-c|$$

例2

不等式 $|a+b+c|\leq |a|+|b|+|c|$ を証明せよ.

解説

$$|a+b+c|=|(a+b)+c| \\ \leq |a+b|+|c| \\ \leq |a|+|b|+|c|$$

等号成立は、 $(a+b)c\geq 0$ かつ $ab\geq 0$

すなわち、 $a\geq 0, b\geq 0, c\geq 0$ または $a\leq 0, b\leq 0, c\leq 0$ のとき

例3

(1) 任意の実数 a, b に対して、不等式 $|a+b|\leq |a|+|b|$ が成り立つことを示せ. また、等号が成り立つ条件を求めよ.

(2) 実数 c ($0<c<1$) と、実数 x, y, a, b の間に $|x-a|<c, |y-b|<c$ という関係があるとき、 $|xy-ab|<(c+|a|+|b|)c$ が成り立つことを示せ.

解説

(1) $|a+b|\geq 0, |a|+|b|\geq 0$ であるから

$$|a+b|^2\leq (|a|+|b|)^2$$

を示せばよい

$$(|a|+|b|)^2-|a+b|^2=a^2+2|a||b|+b^2-(a^2+2ab+b^2) \\ =2(|ab|-ab)\geq 0$$

$$\therefore |a+b|^2\leq (|a|+|b|)^2$$

$$\therefore |a+b| \leq |a| + |b|$$

等号成立は、 $|ab| = ab$ すなわち $ab \geq 0$ のとき

$$\begin{aligned} (2) |xy - ab| &= |xy - ay + ay - ab| \\ &= |(x-a)y + a(y-b)| \\ &\leq |(x-a)y| + |a(y-b)| \\ &= |x-a||y| + |a||y-b| \\ &< c(|y| + |a|) \\ &= c(|y-b+b| + |a|) \\ &\leq c(|y-b| + |b| + |a|) \\ &< (c + |a| + |b|)c \end{aligned}$$

例4

実数 x, y について、次の不等式を証明せよ.

$$(1) |x+y| \leq |x| + |y|$$

$$(2) |x| \leq \frac{x^2+4}{4}$$

$$(3) \left| \frac{1}{x^2+4} - \frac{1}{y^2+4} \right| \leq \frac{1}{8}|x-y|$$

解説

$$(1) -|x| \leq x \leq |x|, -|y| \leq y \leq |y| \text{ より}$$

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|$$

$$\therefore |x+y| \leq |x| + |y|$$

$$(2) \frac{x^2+4}{4} - |x| = \frac{(|x|-2)^2}{4} \geq 0$$

$$\begin{aligned} (3) \left| \frac{1}{x^2+4} - \frac{1}{y^2+4} \right| &= \frac{|y^2-x^2|}{(x^2+4)(y^2+4)} \\ &= \frac{|y+x|}{(x^2+4)(y^2+4)}|y-x| \\ &\leq \frac{|x|+|y|}{(x^2+4)(y^2+4)}|x-y| \quad ((1) \text{より}) \\ &\leq \frac{(x^2+4)+(y^2+4)}{4(x^2+4)(y^2+4)}|x-y| \quad ((2) \text{より}) \end{aligned}$$

$$\frac{(x^2+4)+(y^2+4)}{4(x^2+4)(y^2+4)} \leq \frac{1}{8} \text{ を示せばよい}$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{8} - \frac{(x^2+4)+(y^2+4)}{4(x^2+4)(y^2+4)} &= \frac{(x^2+4)(y^2+4) - 2\{(x^2+4)+(y^2+4)\}}{8(x^2+4)(y^2+4)} \\ &= \frac{x^2y^2 + 2x^2 + 2y^2}{8(x^2+4)(y^2+4)} \geq 0\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{(x^2+4)+(y^2+4)}{4(x^2+4)(y^2+4)} \leq \frac{1}{8} \quad \text{等号成立は, } x=y=0 \text{ のとき}$$

よって

$$\left| \frac{1}{x^2+4} - \frac{1}{y^2+4} \right| \leq \frac{1}{8}|x-y|$$

例5

次の不等式を証明せよ。ただし、文字はすべて実数とする。

$$(1) \quad 0 \leq p \leq q \text{ のとき, } \frac{p}{1+p} \leq \frac{q}{1+q}$$

$$(2) \quad \frac{|p+q|}{1+|p+q|} \leq \frac{|p|}{1+|p|} + \frac{|q|}{1+|q|}$$

解説

$$\begin{aligned}(1) \quad \frac{q}{1+q} - \frac{p}{1+p} &= \frac{q(1+p) - p(1+q)}{(1+q)(1+p)} \\ &= \frac{q-p}{(1+q)(1+p)} \geq 0\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{p}{1+p} \leq \frac{q}{1+q}$$

この問題では必要ないが、等号成立は、 $p=q$ のとき

よって、 $f(x) = \frac{x}{1+x}$ が $x \geq 0$ で単調増加である

(2) $0 \leq |p+q| \leq |p|+|q|$ であるから、(1) より

$$\begin{aligned}\frac{|p+q|}{1+|p+q|} &\leq \frac{|p|+|q|}{1+|p|+|q|} \\ &= \frac{|p|}{1+|p|+|q|} + \frac{|q|}{1+|p|+|q|} \\ &\leq \frac{|p|}{1+|p|} + \frac{|q|}{1+|q|}\end{aligned}$$

等号成立は、 $p, q \geq 0$ かつ $(\frac{|p|}{1+|p|+|q|} = \frac{|p|}{1+|p|} \text{ かつ } \frac{|q|}{1+|p|+|q|} = \frac{|q|}{1+|q|})$

すなわち、 $p=0$ または $q=0$ のとき

例6

実数 x, y が, $|x| + |y| = 1$ を満たしているとき, $|7x - 3y| + |5x - 11y|$ の
最大値は である。

(解説)

$$|7x - 3y| \leq |7x| + |3y| = 7|x| + 3|y|$$

$$|5x - 11y| \leq |5x| + |11y| = 5|x| + 11|y|$$

$$|7x - 3y| + |5x - 11y| \leq (7 + 5)|x| + (3 + 11)|y|$$

$$|y| = 1 - |x| \text{ より}$$

$$= 12|x| + 14(1 - |x|)$$

$$= -2|x| + 14$$

$$0 \leq |x| \leq 1 \text{ より}$$

$$\leq 14$$

よって, $x = 0, y = \pm 1$ のとき, 最大値 14 をとる

補1

(1) $x \geq y \geq 0$ のとき, 不等式 $\frac{x}{1+x} \geq \frac{y}{1+y}$ が成り立つことを示せ.

(2) (ア) 不等式 $\frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} + \frac{|z|}{1+|z|} \geq \frac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}$ が成り立つことを示せ.

(イ) (ア) の不等式で等号が成り立つのはどのような場合か調べよ.

解説

$$(1) \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} = \frac{x(1+y) - y(1+x)}{(1+x)(1+y)} = \frac{x-y}{(1+x)(1+y)} \geq 0$$

$$\therefore \frac{x}{1+x} \geq \frac{y}{1+y}$$

(2) (ア) $|x| + |y| + |z| \geq |x+y+z|$ より

$$\begin{aligned} \frac{|x| + |y| + |z|}{1 + |x| + |y| + |z|} &\geq \frac{|x+y+z|}{1 + |x+y+z|} \\ \frac{|x| + |y| + |z|}{1 + |x| + |y| + |z|} &= \frac{|x|}{1 + |x| + |y| + |z|} + \frac{|y|}{1 + |x| + |y| + |z|} + \frac{|z|}{1 + |x| + |y| + |z|} \\ &\leq \frac{|x|}{1 + |x|} + \frac{|y|}{1 + |y|} + \frac{|z|}{1 + |z|} \end{aligned}$$

より

$$\frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} + \frac{|z|}{1+|z|} \geq \frac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}$$

(イ) 等号成立は, ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ または $x \leq 0, y \leq 0, z \leq 0$) かつ

$$\left(\frac{|x|}{1+|x|+|y|+|z|} = \frac{|x|}{1+|x|} \dots \textcircled{1} \text{かつ} \frac{|y|}{1+|x|+|y|+|z|} = \frac{|y|}{1+|y|} \dots \textcircled{2} \text{かつ} \right.$$

$$\left. \frac{|z|}{1+|x|+|y|+|z|} = \frac{|z|}{1+|z|} \dots \textcircled{3} \right) \text{のとき}$$

①が成り立つとき, $x=0$ または $|y|+|z|=0$

$x=0$ のとき, ②, ③より $y=0$ または $z=0$

$|y|+|z|=0$ のとき, $y=0$ かつ $z=0$

等号成立は, x, y, z のうち少なくとも2つが0のとき