基本問題演習 1. 数と式

$\boxed{1}$

(1) x^2の係数は

$-2\times3+3\times4+2\times1=8$

(2) 与式$=\{(a-b)(a+b)(a^2+b^2)\}^3$

$=\{(a^2-b^2)(a^2+b^2)\}^3$

$=(a^4-b^4)^3$

$=(a^4)^3-3(a^4)^2b^4+3a^4(b^4)^2-(b^4)^3$

$=a^{12}-3a^8b^4+3a^4b^8-b^{12}$

(3) 与式$=(x-y)(x^2+xy+y^2)(x^2-y^2)(x^2+y^2)$

$=(x^3-y^3)(x^4-y^4)$

$=x^7-x^4y^3-x^3y^4+y^7$

<point>

1. 式の展開

$\boxed{2}$

(1) $a^6-7a^3-8=(a^3+1)(a^3-8)$

$=(a+1)(a^2-a+1)(a-2)(a^2+2a+4)$

(2) $x^2y+2xy^2-x^2+4y^2-xy-x-6y+2$

$=(y-1)x^2+(2y^2-y-1)x+4y^2-6y+2$

$=(y-1)x^2+(y-1)(2y+1)x+2(y-1)(2y-1)$

$=(y-1)\{x^2+(2y+1)x+2(2y-1)\}$

$=(y-1)(x+2)(x+2y-1)$

(3) 与式$=(x^2-12x+27)(x^2-12x+35)-9$

$A=x^2-12x+31$とおくと

$=(A-4)(A+4)-9$

$=A^2-25$

$=(A+5)(A-5)$

$=(x^2-12x+36)(x^2-12x+26)$

$=(x-6)^2(x^2-12x+26)$

$\begin{array}{ccc} 3 & \times & -1 \\ 5 & & -2 \end{array}$

(4) 与式$=6x^2+(y-1)x-(15y^2-11y+2)$

$=6x^2+(y-1)x-(3y-1)(5y-2)$

$\begin{array}{ccccc} 2 & \times & -(3y-1) & \to & -9y+3 \\ 3 & & 5y-2 & \to & 10y-4 \\ \hline & & & & y-1 \end{array}$

$=\{2x-(3y-1)\}(3x+5y-2)$

$=(2x-3y+1)(3x+5y-2)$

[別解]

$\begin{array}{ccc} 2 & \times & -3 \\ 3 & & 5 \end{array}$

与式$=(2x-3y)(3x+5y)-x+11y-2$

$=\{(2x-3y)+k\}\{(3x+5y)+l\}$とおくと

$=(2x-3y)(3x+5y)+l(2x-3y)+k(3x+5y)+kl$

$=(2x-3y)(3x+5y)+(2l+3k)x+(-3l+5k)y+kl$

$\begin{cases} 2l+3k=-1 \cdots ① \\ -3l+5k=11 \cdots ② \\ kl=-2 \cdots ③ \end{cases}$

①, ②より $k=1$ $l=-2$

これは③を満たすから

与式$=(2x-3y+1)(3x+5y-2)$

(5) 与式$=(b+c)a^2+(b^2+2bc+c^2)a+bc^2+b^2c$

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)$

$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}$

$=(b+c)(a+b)(a+c)$

$=(a+b)(b+c)(c+a)$

(6) $(x-y)^3+(z-y)^3-(x-2y+z)^3$

$a=x-y,\ b=z-y$とおくと

$=a^3+b^3-(a+b)^3$

$=-3a^2b-3ab^2$

$=-3ab(a+b)$

$=-3(x-y)(z-y)(x-2y+z)$

$=3(x-y)(y-z)(x-2y+z)$

[別解]

$a=x-y,\ b=z-y,\ c=x-2y+z$とおくと

与式$=a^3+b^3-c^3=a^3+b^3+(-c)^3$

$=\underbrace{(a+b-c)}_{0}(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca)-3abc$

$=-3(x-y)(z-y)(x-2y+z)$

$=3(x-y)(y-z)(x-2y+z)$

(7) $P(x)=2x^3-5x^2+5x+4$とおく

$P(-\frac{1}{2})=0$より

$P(x)=(2x+1)(x^2-3x+4)$

$\begin{array}{r|rrrr} -\frac{1}{2} & 2 & -5 & 5 & 4 \\ & & -1 & 3 & -4 \\ \hline & 2 & -6 & 8 & 0 \end{array}$

<point>

1. 因数分解の工夫
   1. まず共通因数をくくる
   2. 置き換えて公式利用
   3. 文字が2種類以上あるときは次数の低い文字について整理

[3]

(1) $a^2+b^2=(a+b)^2-2ab$ より

$10=8-2ab$

$\therefore ab=-1$

$a^3+b^3=(a+b)^3-3ab(a+b)$

$=(2\sqrt{2})^3-3\cdot(-1)\cdot 2\sqrt{2}$

$=16\sqrt{2}+6\sqrt{2}=22\sqrt{2}$

$a^5+b^5=(a^2+b^2)(a^3+b^3)-(ab)^2(a+b)$

$=10\cdot 22\sqrt{2}-2\sqrt{2}$

$=218\sqrt{2}$

(2) $\left(a-\frac{1}{a}\right)^2=a^2+\frac{1}{a^2}-2$

$=5$

$a>1$であるから $a-\frac{1}{a}>0$ より

$a-\frac{1}{a}=\sqrt{5}$

$a^2+\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2$ より

$\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=9$

$a+\frac{1}{a}>0$ より

$a+\frac{1}{a}=3$

$a^2-\frac{1}{a^2}=\left(a+\frac{1}{a}\right)\left(a-\frac{1}{a}\right)$

$=3\sqrt{5}$

$a^3+\frac{1}{a^3}=\left(a+\frac{1}{a}\right)^3-3\left(a+\frac{1}{a}\right)$

$=3^3-3\cdot 3$

$=2\cdot 3^2=18$

$a^4+\frac{1}{a^4}=\left(a^2+\frac{1}{a^2}\right)^2-2$

$=7^2-2=47$

<point>

1. 対称式の計算

[4]

(1) $\frac{x+y}{3}=\frac{y+z}{4}=\frac{z+x}{5}=k\ (k\neq 0)$ とおくと

$$\begin{cases} x+y=3k & \cdots ① \\ y+z=4k & \cdots ② \\ z+x=5k & \cdots ③ \end{cases}$$

①+②+③より $x+y+z=6k$

よって $x=2k,\ y=k,\ z=3k$ より

$x:y:z=\boxed{2:1:3}$

また

$\frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}=\frac{2k^2+3k^2+6k^2}{4k^2+k^2+9k^2}=\boxed{\frac{11}{14}}$

(2) $\frac{b+c}{a}=\frac{c+a}{b}=\frac{a+b}{c}=k$ とすると

$$\begin{cases} b+c=ak & \cdots ① \\ c+a=bk & \cdots ② \\ a+b=ck & \cdots ③ \end{cases}$$

①+②+③より

$2(a+b+c)=k(a+b+c)$ ※$a+b+c=0$となることも有るので $a+b+c$で割ってはならない

$(k-2)(a+b+c)=0$

$\therefore k=2$ or $a+b+c=0$

(i) $k=2$のとき

$\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}=\frac{2a\cdot 2b\cdot 2c}{abc}=8$

(ii) $a+b+c=0$のとき

$\frac{(b+c)(c+a)(a+b)}{abc}=\frac{(-a)(-b)(-c)}{abc}=-1$

<point>

1. 比例式の計算

[5]

$(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$ より

$4=6+2(xy+yz+zx)$

$\therefore xy+yz+zx=\boxed{-1}$

$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$ より

$8-3xyz=2(6+1)$

$\therefore xyz=\boxed{-2}$

$(t-x)(t-y)(t-z)=0$

$t^3-(x+y+z)t^2+(xy+yz+zx)t-xyz=0$ すなわち

$\boxed{t^3-2t^2-t+2=0}$ の3解は x, y, z である

$t^2(t-2)-(t-2)=0$

$(t^2-1)(t-2)=0$

$(t+1)(t-1)(t-2)=0$

$x\leqq y\leqq z$ より

$x=\boxed{-1}\ y=\boxed{1}\ z=\boxed{2}$

<point>

1. 3文字の対称式の計算

6

$2<\sqrt{7}<3$ より
$\ \ \sqrt{4}\quad\ \sqrt{9}$

$\alpha=\sqrt{7}-2$

$\alpha+2=\sqrt{7}$

$(\alpha+2)^2=7$

$\therefore \alpha^2+4\alpha-3=0$

$f(x)=(x^2+4x-3)(x^2+x-2)+10x-4$

$$
\begin{array}{r}
x^2+x-2 \\
x^2+4x-3\ \big)\ \overline{x^4+5x^3-x^2-x+2} \\
x^4+4x^3-3x^2 \\
\hline
x^3+2x^2-x \\
x^3+4x^2-3x \\
\hline
-2x^2+2x+2 \\
-2x^2-8x+6 \\
\hline
10x-4
\end{array}
$$

$x=\alpha$ を代入して

$f(\alpha)=10\alpha-4$

$=10(\sqrt{7}-2)-4$

$=10\sqrt{7}-24$ //

<point>

1. 整式の割り算
2. 次数下げ

7

(1) $\sqrt{2\alpha+\beta}+\sqrt{\beta-2\alpha}$

$=\sqrt{\alpha^2+2\alpha+1}+\sqrt{\alpha^2-2\alpha+1}$

$=\sqrt{(\alpha+1)^2}+\sqrt{(\alpha-1)^2}$

$=|\alpha+1|+|\alpha-1|$

$=|\sqrt{3}|+|\sqrt{3}-2|$

$=\sqrt{3}-(\sqrt{3}-2)$

$=2$ //

(2) $\sqrt{(a+2)^2}+\sqrt{a^2}$

$=|a+2|+|a|$

	-2	0	
$\lvert a+2\rvert$	$-(a+2)$	$a+2$	$a+2$
$\lvert a\rvert$	$-a$	$-a$	a
$\lvert a+2\rvert+\lvert a\rvert$	$-2a-2$	2	$2a+2$

$$=\begin{cases}-2a-2 & (a<-2)\\ 2 & (-2\leqq a<0)\\ 2a+2 & (a\geqq 0)\end{cases}$$ //

<point>

1. $\sqrt{a^2}=|a|$
2. 絶対値 $|A|=\begin{cases}A & (A\geqq 0)\\ -A & (A<0)\end{cases}$

8

(1) $x+y=\dfrac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}=10$

$xy=1.$

$x^6+y^6=(x^3+y^3)^2-2(xy)^3$

ここで

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

$=10^3-3\cdot1\cdot10=970$

より

$=(970)^2-2\cdot1^3$

よって1の位の数字は8 //

(2) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}+\sqrt{7}}=\dfrac{1}{(2+\sqrt{3})+\sqrt{7}}\cdot\dfrac{2+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{(2+\sqrt{3})-\sqrt{7}}$

$=\dfrac{2+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{(2+\sqrt{3})^2-7}$

$=\dfrac{2+\sqrt{3}-\sqrt{7}}{4\sqrt{3}}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}+3-\sqrt{21}}{12}$ //

(3) $\sqrt{11+4\sqrt{6}}=\sqrt{11+2\sqrt{24}}=\sqrt{8}+\sqrt{3}=2\sqrt{2}+\sqrt{3}$ //
($11=8+3$, $24=8\cdot3$)

(4) $\sqrt{21+\sqrt{80}}=\sqrt{21+2\sqrt{20}}=\sqrt{20}+1$
($21=20+1$, $20=20\cdot1$)

与式 $=\sqrt{7-(\sqrt{20}+1)}$

$=\sqrt{6-2\sqrt{5}}$

$=\sqrt{5}-1$ //

(5) $A=\dfrac{\sqrt{3}i\sqrt{2}i+\sqrt{2}i}{a+\sqrt{3}i}=\dfrac{-\sqrt{6}+\sqrt{2}i}{a+\sqrt{3}i}\cdot\dfrac{a-\sqrt{3}i}{a-\sqrt{3}i}$

$=\dfrac{(-\sqrt{6}a+\sqrt{6})+(\sqrt{2}a+3\sqrt{2})i}{a^2+3}$

これが実数となるとき

$\sqrt{2}a+3\sqrt{2}=0\quad\therefore a=-3$

このとき

$A=\dfrac{4\sqrt{6}}{12}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ //

<point>

1. $\sqrt{\ }$ の計算
2. i の計算