

高2数学 基本問題演習 40. 空間ベクトル(3)

①[(1) 2012 芝浦工業大 (2) 2003 防衛医科大学校]

- (1) 点 O を原点とする座標空間の点 $A(-1, -5, 5)$ と $B(2, 1, 2)$ を通る直線 ℓ と xy 平面との交点 P の座標は ア であり、 $\triangle OAP$ の面積は イ である。また、直線 ℓ 上を動く点 Q と原点 O との距離 OQ の最小値は ウ である。
- (2) 座標空間の直線 l_1 は 2 点 $A(2, 0, 0)$ と $B(0, 1, 1)$ を通る。直線 l_2 は 2 点 $C(3, 3, 0)$ と $D(0, 0, a)$ を通り、 l_1 と交わっている。 a の値はいくらか。

②[(1) 愛媛大 (2) 慶応義塾大]

- (1) 空間に 3 点 $A(1, -2, 0)$, $B(4, -5, 3)$, $C(3, -1, 2)$ が与えられている。3 点 A, B, C を通る平面と z 軸との交点を求めよ。
- (2) 空間に直線 $l: (x, y, z) = (0, -3, -2) + t(1, 3, 2)$ (t はパラメーター) および点 $P(1, 2, 1)$ がある。直線 l を含み、点 P を通る平面 α と z 軸との交点を求めよ。

③[2015 甲南大]

ベクトル $(3, 2, 4)$ に垂直で原点を通る平面の方程式を求めよ。

④[I. 首都大 II. 2008 信州大 III. 2006 京都大 IV. 2019 北海道大]

- I. 3 点 $A(2, 1, 5)$, $B(1, -1, 3)$, $C(1, 1, 7)$ を通る平面を α とする。
2 点 $D(0, 1, 2)$, $E(2, -5, 0)$ を通る直線と平面 α の交点を P とするとき、点 P の座標を求めよ。
- II. 空間内に 3 点 $A(1, -1, 1)$, $B(-1, 2, 2)$, $C(2, -1, -1)$ がある。このとき、ベクトル $\overrightarrow{OA} + x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ の大きさの最小値を求めよ。
- III. 座標空間に 4 点 $A(2, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$, $C(0, 1, 2)$, $D(1, 3, 7)$ がある。
3 点 A, B, C を通る平面に関して点 D と対称な点を E とするとき、点 E の座標を求めよ。

高2数学 基本問題演習 40. 空間ベクトル(3)

Ⅳ. p を負の実数とする。座標空間に原点 O と 3 点 $A(-1, 2, 0)$, $B(2, -2, 1)$, $P(p, -1, 2)$ があり, 3 点 O, A, B が定める平面を α とする。また, 点 P から平面 α に垂線を下ろし, α との交点を Q とする。

- (1) 点 Q の座標を p を用いて表せ。
- (2) 点 Q が $\triangle OAB$ の周または内部にあるような p の範囲を求めよ。

⑤ [2016 立命館大]

空間において, 点 $A(0, 6, 0)$ を中心とする半径 3 の球面 S_1 上を動く点 Q を考える。更に, 原点を O として, 線分 OQ の中点を P とする。

- (1) 点 A, Q, P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}, \vec{q}, \vec{p}$ とする。このとき, $\vec{q}$ はベクトル方程式 $\left| \vec{q} - \boxed{} \vec{a} \right| = \boxed{}$ を満たす。また, $\vec{q}$ は $\vec{p}$ を用いて $\vec{q} = \boxed{} \vec{p}$ と表せる。したがって, $\vec{p}$ はベクトル方程式 $\left| \vec{p} - \boxed{} \vec{a} \right| = \boxed{}$ を満たす。ゆえに, 点 P は半径 $\boxed{}$, 中心の座標 $\boxed{}$ の球面上を動く。この球面を S_2 とする。

- (2) 球面 S_1 上の点の座標を (x, y, z) とすると, x, y, z は方程式 $\boxed{}$ を満たす。

同様に, 球面 S_2 上の点 (x, y, z) は方程式 $\boxed{}$ を満たす。そこで, 2 つの球面

S_1 と S_2 が交わってできる円を C_1 とするとき, 円 C_1 を含む平面の方程式は $\boxed{}$

となる。このとき, 円 C_1 の中心の座標は $\boxed{}$ であり, 半径は $\boxed{}$ である。

更に, 点 $U(0, -1, 0)$ に対し, 線分 UQ の中点を V とする。点 Q が球面 S_1 上を動くときの点 V の軌跡は球面となる。この球面を S_3 とすると, 2 つの球面 S_1 と S_3 が

交わってできる円 C_2 の中心の座標は $\boxed{}$ であり, 半径は $\boxed{}$ である。

⑥ [2004 名城大]

空間の点 $A(6, 3, -4)$ の原点 O に関する位置ベクトルを $\vec{a}$ とし, $\vec{v} = (-1, 1, 4)$ とおく。点 A を通り $\vec{v}$ を方向ベクトルとする直線のベクトル方程式を $\vec{p} = \vec{a} + t\vec{v}$ とする。更に, この直線と点 $C(2, 4, 6)$ を中心とする半径 3 の球面との交点を P, Q とする。ただし, x 座標の小さい方を P とする。

- (1) 2 点 P, Q の座標を求めよ。
- (2) ベクトル $\overrightarrow{CP}, \overrightarrow{CQ}$ のなす角を求めよ。

高2数学 基本問題演習 40. 空間ベクトル(3)

7 [I . 2015 東北学院大 II . 2004 関西学院大]

I . 空間内に点 $A(3, 7, 5)$ と $\vec{a}=(1, 2, 2)$ がある。点 A を通り $\vec{a}$ に垂直な平面 α 上に点 $P(x, y, z)$ をとるとき、次の問いに答えよ。

- (1) x, y, z の間に成り立つ関係式を求めよ。
- (2) 原点 O から平面 α に垂線 OH を下ろすとき、点 H の座標を求めよ。
- (3) 平面 α と球面 $x^2+y^2+z^2=225$ が交わってできる円の半径を求めよ。

II . 点 $(1, 0, 0)$ を中心とする、半径 2 の球面を S とし、方程式

$$(x, y, z)=(1, -1, a)+s(1, 0, -1)+t(1, 2, 1) \quad (s, t \text{ は実数})$$

で与えられる平面を π とする。 S と π が共有点をもつように、定数 a の値の範囲を定めよ。

8 [I . 1998 図書館情報大 II . 静岡大]

I . 原点 O 、点 A, B, C を同一平面上にはない空間内の 4 点とし、点 X に対する位置ベクトル $\overrightarrow{OX}$ を $\overrightarrow{OX}=p\overrightarrow{OA}+q\overrightarrow{OB}+r\overrightarrow{OC}$ で表す (p, q, r は実数)。以下のそれぞれについて、 X が与えられた条件を満たすとき、 p, q, r が満たすべき必要十分条件を求めよ。

- (1) X は、平面 ABC 上にある。
- (2) X は、線分 AB 上にある。
- (3) X は、三角形 ABC の重心と原点 O とを通る直線上にある。
- (4) X は、平面 OAB と平行で点 C を通る平面上にある。
- (5) X は、三角形 ABC の内部または辺上にある。

II . 空間に 3 点 $A(1, 0, 0), B(0, 1, 2), C(2, -2, 0)$ がある。

$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC} \quad (x+y+2z=1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$ のとき、点 P の描く図形の面積を求めよ。