

高2数学 基本問題演習 39. 空間ベクトル(2)

① [I. 1998 宮城教育大 II. 2012 龍谷大]

I. 空間において原点をOとし、3点A, B, Cの位置ベクトルを
 $\overrightarrow{OA}=(-2, 1, 3), \overrightarrow{OB}=(-3, 1, 4), \overrightarrow{OC}=(-3, 3, 5)$ とする。

- (1) 2つのベクトル $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ の大きさを求めよ。
- (2) 2つのベクトル $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ のなす角 $\angle BAC$ の大きさを求めよ。
- (3) 3点A, B, Cで定まる三角形ABCの面積を求めよ。
- (4) 2つのベクトル $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ に直交する単位ベクトルを求めよ。

II. 2つのベクトル $\vec{a}=(1, 1, 0), \vec{b}=(s, 1, -s)$ のなす角が $\frac{\pi}{4}$ であるとき、 s の値を求めよ。

② [(1) 2023 札幌医科大 (2) 2009 愛知工業大 (3) 2012 東京工業大]

- (1) $\vec{a}=(3, -1, 2), \vec{b}=(2, 2, 1)$ とする。 t をすべての実数とするととき $|\vec{a}+t\vec{b}|$ の最小値を求めよ。
- (2) 1辺の長さが2の立方体 $ABCD-EFGH$ において、線分ACと線分BDの交点をPとする。このとき、PEの長さは $\sqrt[3]{\boxed{}}$, 内積 $\overrightarrow{PE} \cdot \overrightarrow{PF}$ の値は $\frac{1}{\boxed{}}$ である。
- (3) 辺の長さが1である正四面体OABCにおいて辺ABの中点をD, 辺OCの中点をEとする。2つのベクトル $\overrightarrow{DE}$ と $\overrightarrow{AC}$ との内積を求めよ。

③ [上智大]

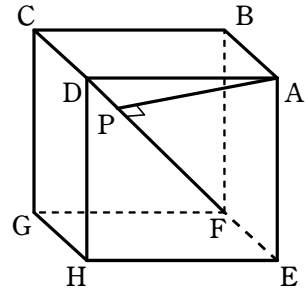
1辺の長さが l の正四面体OABCで、OAの中点をM, BCの中点をNとする。

$\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ をそれぞれ $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ とかくとき、 $\overrightarrow{MN}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表すと $\overrightarrow{MN} = \boxed{}$ である。
 $\overrightarrow{MN}$ の大きさは $|\overrightarrow{MN}| = \boxed{}$ であり、 $\overrightarrow{MN}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角を弧度法で表せば
 $\boxed{}$ ラジアンである。

高2数学 基本問題演習 39. 空間ベクトル(2)

4 [I. 埼玉大 II. 2011 弘前大]

I. 右図のような一辺の長さが1の立方体 $ABCD-EFGH$ において、ベクトル $\overrightarrow{AB}$ を $\vec{b}$ 、ベクトル $\overrightarrow{AE}$ を $\vec{e}$ 、ベクトル $\overrightarrow{AD}$ を $\vec{d}$ とおく。また、線分 DF 上に1点 P を、 $DF \perp AP$ となるようにとる。さらに線分 AP の延長が平面 $CDHG$ と交わる点を R とする。このとき、



- (1) $\overrightarrow{AP}$ を $\vec{b}, \vec{e}, \vec{d}$ を用いて表せ。
- (2) $\overrightarrow{AR}$ を $\vec{b}, \vec{e}, \vec{d}$ を用いて表せ。

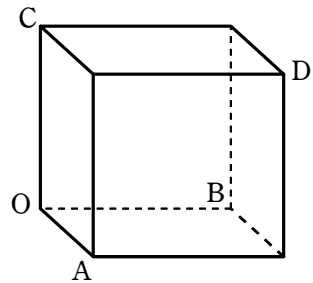
II. 正四面体 $ABCD$ において、 $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{c}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{d}$ とし、辺 AB , AC , CD , BD の中点をそれぞれ P , Q , R , S とする。このとき、4点 P , Q , R , S は同一平面上にあることを示し、さらに四角形 $PQRS$ は正方形になることを示せ。

5 [I. 2013 山口大 II. 広島大]

I. 1辺の長さが4の正四面体 $OABC$ において、三角形 ABC の重心を G とする。

- (1) 三角形 ABC の面積を求めよ。
- (2) 直線 OG は、三角形 ABC の定める平面に垂直であることを証明せよ。
- (3) 線分 OG を $3:1$ に内分する点を D 、三角形 OBC の重心を E としたとき、 $DG = DE$ であることを証明せよ。
- (4) 正四面体 $OABC$ に内接する球の体積を求めよ。

II. 1辺の長さが1の立方体の3つの辺を OA , OB , OC とし、 O を含む3つの面上にはない頂点を D とする。このとき、 OD は三角形 ABC に直交することを示せ。



高2数学 基本問題演習 39. 空間ベクトル(2)

6 [2015 九州大]

1 辺の長さが 1 である正四面体 $OABC$ を考える。辺 OA の中点を P , 辺 OB を $2:1$ に内分する点を Q , 辺 OC を $1:3$ に内分する点を R とする。

- (1) 線分 PQ の長さ と 線分 PR の長さを求めよ。
- (2) $\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{PR}$ の内積 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$ を求めよ。
- (3) 三角形 PQR の面積を求めよ。

7 [I. 2016 金沢工業大 II. 佐賀大 III. 2006 大分大]

I. 原点を O とする空間に 3 点 $A(1, -2, -1)$, $B(1, -3, 0)$, $C(2, -3, 1)$ をとり, O から 3 点 A, B, C を含む平面に垂線 OH を下ろす。

- (1) 2 つのベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の内積は $\boxed{}$ である。
- (2) $\angle BAC = \frac{\pi}{\boxed{}}$ である。
- (3) $\triangle ABC$ の面積は $\boxed{}$ である。
- (4) $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ とすると, $s = \boxed{}$, $t = \boxed{}$ である。
- (5) 垂線 OH の長さは $\boxed{}$ である。
- (6) 四面体 $OABC$ の体積は $\boxed{}$ である。

II. 各辺の長さが 1 の正四面体を $PABC$ とし, A から平面 PBC へ下ろした垂線の足を H とする. $\overrightarrow{PA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{PB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{PC} = \vec{c}$ とおく.

- (1) 内積 $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{c}$, $\vec{b} \cdot \vec{c}$ を求めよ.
- (2) $\overrightarrow{PH}$ を $\vec{b}$ と $\vec{c}$ を用いて表せ.
- (3) 正四面体 $PABC$ の体積を求めよ.

III. 空間内に 4 点 $A(0, 0, 0)$, $B(2, 1, 1)$, $C(-2, 2, -4)$, $D(1, 2, -4)$ がある。

- (1) $\angle BAC = \theta$ とおくとき, $\cos \theta$ の値と $\triangle ABC$ の面積を求めよ。
- (2) $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ の両方に垂直なベクトルを 1 つ求めよ。
- (3) 点 D から, 3 点 A, B, C を含む平面に垂直な直線を引き, その交点を E とするとき, 線分 DE の長さを求めよ。
- (4) 四面体 $ABCD$ の体積を求めよ。

高2数学 基本問題演習 39. 空間ベクトル(2)

8 [2010 中央大]

空間内の4点 A, B, C, D を頂点とする正四面体の重心 G は, 点 O を基準とする位置ベクトルを使って $\overrightarrow{OG} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}}{4}$ と表され,

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} =$ となることわかる。また正四面体の対称性から

$|\overrightarrow{GA}| = |\overrightarrow{GB}| = |\overrightarrow{GC}| = |\overrightarrow{GD}|$ であり, また $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{GC}, \overrightarrow{GD}$ のうち2つの異なるベクトルのなす角はどれも等しい。この角度を θ とする。 $\overrightarrow{GA}$ は面 BCD に直交し, 他のベクトルと面も同様であるから, この正四面体の2つの面のなす角(これを面角という) ω と θ は $\theta =$ を満たす。そこで, 内積 $\overrightarrow{GA} \cdot (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})$ を計算すれば

$\cos \theta =$ と $\cos \omega =$ を得る。

一方, この正四面体の6本の各辺の中点を頂点として正八面体ができる。よって正四面体の面角 ω と正八面体の面角 ϕ は $\phi =$ の関係にあり, $\cos \phi =$ となる。

この正八面体の1辺の長さと正四面体 ABCD の1辺の長さの比は である。これ

より, 1辺の長さの等しい正四面体と正八面体の体積の比は となる。