

高2数学 基本問題演習 演習 15. 三角関数(3)

1 [2005 自治医科大]

$\frac{1}{(\cos 20^\circ) \cdot (\cos 40^\circ) \cdot (\cos 80^\circ)}$ の値を求めよ。

2 [(1) 上智大 (2) 2008 信州大]

(1) $\sin 40^\circ + \sin 160^\circ + \sin 280^\circ = \boxed{}$ である。

(2) $\sin 20^\circ + \sin 40^\circ = \sin 80^\circ$ であることを示せ。

3 [2004 センター]

三角関数の加法定理から導かれる等式

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2},$$

$$\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{2} \{ \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta) \}$$

を用いて、 $\sin^3 10^\circ + \sin^3 50^\circ - \sin^3 70^\circ$ の値を求めよう。

(1) $\sin 10^\circ + \sin 50^\circ$ を変形すると $2 \sin 30^\circ \cos \boxed{\text{アイ}}^\circ$ となる。

したがって $\sin 10^\circ + \sin 50^\circ - \sin 70^\circ = \boxed{\text{ウ}}$ である。

(2) $\sin 10^\circ \sin 50^\circ$ を変形すると $\frac{1}{2} (\cos \boxed{\text{エオ}}^\circ - \cos 60^\circ)$ となる。

$$\begin{aligned} \text{したがって } \sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ &= \frac{1}{2} \cos \boxed{\text{エオ}}^\circ \sin 70^\circ - \frac{1}{4} \sin 70^\circ \\ &= \frac{1}{4} (\sin 110^\circ + \sin \boxed{\text{カキ}}^\circ - \sin 70^\circ) \\ &= \frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}} \end{aligned}$$

である。

(3) $a + b - c = 0$ のとき、等式 $a^3 + b^3 - c^3 = -\boxed{\text{コ}} abc$ が成り立つから

$$\sin^3 10^\circ + \sin^3 50^\circ - \sin^3 70^\circ = -\frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}} \text{ である。}$$

高2数学 基本問題演習 演習 15. 三角関数(3)

4 [名古屋市立大]

$\theta \asymp 2m\pi$ (m は整数) とする.

$$f_n(\theta) = \cos \theta + \cos 2\theta + \cdots + \cos n\theta \quad (n=1, 2, \cdots)$$

について

(1) $f_3(\theta) \sin \frac{\theta}{2} = \sin \frac{3\theta}{2} \cos 2\theta$ を示せ.

(2) 与えられた n に対して $f_n(\theta) = 0$ となる θ の値を求めよ.

5 [2022 早稲田大]

$2\sin \theta + \sin 2\theta + 2\sin 3\theta - 2\sin 2\theta \cos \theta > 0$ ($0 < \theta < \pi$) を満たす θ の範囲は,

$$0 < \theta < \frac{\text{ア}}{\text{イ}} \pi, \quad \frac{\text{ウ}}{\text{エ}} \pi < \theta < \pi \text{ である。}$$

6 [2013 和歌山大]

(1) 次の式が成り立つことを示せ.

$$\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta) = 2\cos \alpha \sin \beta$$

(2) 自然数 n に対して, $2\sum_{k=1}^n \cos 2k\theta \sin \theta = \sin(2n+1)\theta - \sin \theta$ が成り立つことを示せ.

(3) 自然数 n に対して, $\tan \frac{\pi}{4n} = \frac{1}{1 + 2\sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi}{2n}}$ が成り立つことを示せ.

7 [2008 埼玉大]

(1) 正弦に関する加法定理を用いて,

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

が成り立つことを示せ.

(2) 三角形 ABC の頂点 A, B, C の内角の大きさをそれぞれ A, B, C で表すことにする。 $A = \frac{\pi}{3}$ のとき, $\sin B + \sin C$ および $\cos B + \cos C$, それぞれの範囲を求めよ.

高2数学 基本問題演習 演習 15. 三角関数(3)

8 [2008 首都大学東京]

- (1) $x + y = \pi$ を満たす実数 x, y に対して, 次の等式が成り立つことを示せ。

$$\sin x + \sin y = 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2}$$

- (2) $x + y + z = \pi$ を満たす実数 x, y, z に対して, 次の等式が成り立つことを示せ。

$$\sin x + \sin y + \sin z = 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2}$$

- (3) $x + y + z + w = \pi$ を満たす実数 x, y, z, w に対して, 等式

$$\sin x + \sin y + \sin z + \sin w = 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{y}{2} \cos \frac{z}{2} \cos \frac{w}{2}$$

は必ずしも成り立たないことを示せ。

9 [(1) 1998 同志社大 (2) 2005 宮崎大]

- (1) $m (m > 1)$ を定数とする. $\sin mx = \sin x$ を満たす x の値をすべて求めよ.

- (2) $0 \leq \alpha < 2\pi, 0 \leq \beta < 2\pi$ とする。このとき, 2つの等式 $\sin \alpha = \cos \beta, \cos \alpha = \sin \beta$ が同時に成り立つための必要十分条件を α と β の関係式で表せ。