

基本問題演習 40. 空間ベクトル

[1]

d) 直線上の点 $R(x, y, z)$ とすると

$$\vec{OR} = \vec{OA} + t\vec{AB} \quad (t: \text{実数})$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = 6t + 5 \\ z = -9t + 7 \end{cases}$$

よって x, y, z が $x=0$ と $z=0$ となる t を求めよ

$$-9t + 7 = 0 \quad \therefore t = \frac{7}{9}$$

よって

$$P\left(\frac{4}{3}, 5, 0\right)$$

$\triangle OAP$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{OA}|^2 |\vec{OP}|^2 - (\vec{OA} \cdot \vec{OP})^2}$$

$$= \frac{1}{2} \sqrt{5 \cdot 41 - 20^2}$$

$$= \frac{\sqrt{250}}{2} = \frac{5\sqrt{10}}{2}$$

② A を通る直線 l 上の点 R は $\vec{OR} = \vec{OA} + t\vec{AB}$ と表す

$\vec{OR} \perp \vec{AB}$ となる t を求めよ

$$3(3t-1) + 6(6t+5) - 9(-9t+7) = 0$$

$$54t - 48 = 0 \quad \therefore t = \frac{8}{9}$$

よって

$$Q\left(-\frac{5}{9}, \frac{1}{3}, \frac{7}{9}\right)$$

よって

$$OQ = \sqrt{\frac{25}{81} + \frac{1}{9} + \frac{49}{81}} = \frac{\sqrt{75}}{9}$$

③ 直線上の点 $P(x, y, z)$ とすると

$$\vec{OP} = \vec{OA} + s\vec{AB} \quad (s: \text{実数})$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{cases} x = 2 + s \\ y = s \\ z = s \end{cases}$$

直線上の点 $Q(x, y, z)$ とすると

$$\vec{OQ} = \vec{OC} + t\vec{CP} \quad (t: \text{実数})$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{cases} x = 3 - 3t \\ y = 3 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$$

直線 l と l' が交点を持つとすると

$$\begin{cases} 2 + s = 3 - 3t \\ s = 3 - 3t \\ s = 2t \end{cases}$$

これを解いて s, t の値を求めよ

$$s = \frac{2}{9}, t = \frac{7}{9} \quad \therefore Q = \left(\frac{16}{9}, \frac{17}{9}, \frac{14}{9}\right)$$

[2]

d) 平面 ABC 上の点 $P(x, y, z)$ とすると

$$\vec{OP} = \vec{OA} + s\vec{AB} + t\vec{AC} \quad (s, t: \text{実数})$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x = 1 + 3s + 2t \\ y = -2 + 3s + t \\ z = 2t \end{cases}$$

よって x, y, z が $x=0, y=0$ と $z=0$ となる s, t を求めよ

$$\begin{cases} 3s + 2t = -1 \\ -3s + t = -2 \end{cases} \quad \therefore t = \frac{1}{9}, s = -\frac{5}{9}$$

よって

$$(0, 0, -\frac{2}{9})$$

③ 平面 α 上の点 $Q(x, y, z)$ とすると

$$\vec{OQ} = \vec{OA} + s\vec{AB} + t\vec{AP} \quad (s, t: \text{実数})$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x = s + t \\ y = -3 + s + 5t \\ z = 2 + s + 3t \end{cases}$$

よって x, y, z が $x=0, y=0, z=0$ となる s, t を求めよ

$$\begin{cases} s + t = 0 \\ -3 + s + 5t = 0 \\ 2 + s + 3t = 0 \end{cases} \quad t = \frac{3}{2}, s = -\frac{3}{2}$$

よって

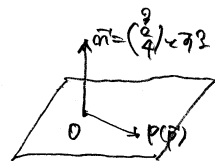
$$(0, 0, -\frac{1}{2})$$

[3]

平面 α 上の点 $P(x, y, z)$ とすると

$$\vec{OP} = \vec{O}$$

$$3x + 2y + 4z = 0$$



4

I. 平面 α 上の点 $E \in Q(x, y, z)$ とする

$$\vec{OE} = s\vec{OA} + t\vec{AB} + u\vec{AC} \quad (s, t, u: \text{実数})$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x = 2 - s - t \\ y = 1 - 2s \\ z = 5 - 2s + 2t \end{cases}$$

直線 DE 上の点 $R(x, y, z)$ とする

$$\vec{OR} = s'\vec{OD} + k\vec{OE} \quad (k: \text{実数})$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x = 2k \\ y = 1 - 6k \\ z = 2 - 2k \end{cases}$$

これら2式を比較

$$\begin{cases} 2 - s - t = 2k \\ 1 - 2s = 1 - 6k \\ 5 - 2s + 2t = 2 - 2k \end{cases} \quad \begin{cases} s + t + 2k = 2 \dots ① \\ s = 6k \dots ② \\ 2s - 2t = 3 \dots ③ \end{cases}$$

①-②より

$$\begin{cases} t + 5k = 2 \\ -2t + 4k = 3 \end{cases} \quad \therefore k = \frac{1}{2}$$

よって

$$P(1, -2, 1)$$

II. $\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{AB} + u\vec{AC}$ とおくと

P は平面 ABC 上の点である

$\vec{OP} \perp$ 平面 ABC である $|\vec{OP}|$ は

最短距離

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

よって

$\vec{OP} \perp \vec{AB}$ である $\vec{OP} \cdot \vec{AB} = 0$ より

$$-2(1-2s+t) + 3(-1+s) + 1(1-2t) = 0$$

$$1-4s+t = 4 \quad 7s-2t = 2 \dots ①$$

$\vec{OP} \perp \vec{AC}$ である $\vec{OP} \cdot \vec{AC} = 0$ より

$$1-2s+t-2(1+s-2t) = 0$$

$$4s-5t = -1 \dots ②$$

①, ②より

$$s = \frac{4}{9}, \quad t = -\frac{5}{9}$$

よって

$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} \\ \frac{2}{9} \end{pmatrix} \quad |\vec{OP}| = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

III. 平面 ABC 上の点 $E \in P(x, y, z)$ とする

$$\vec{OE} = s\vec{OA} + t\vec{AB} + u\vec{AC} \quad (s, t, u: \text{実数})$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x = 2 - s + 2t \\ y = 1 - s \\ z = s + 2t \end{cases}$$

点 P は平面 ABC 上の点である $|\vec{OP}|$ は

$\vec{OP} \perp \vec{AB}$ である $\vec{OP} \cdot \vec{AB} = 0$ より

$$-1(2-s+2t) - (1-s) + s+2t = 0$$

$$3s+4t = 3 \dots ①$$

$\vec{OP} \perp \vec{AC}$ である $\vec{OP} \cdot \vec{AC} = 0$ より

$$-2(2-s+2t) + 2(s+2t) = 0$$

$$2s+4t = 2 \dots ②$$

①, ②より

$$s = 1, \quad t = 0$$

よって $H(1, 0, 1)$

$E(a, b, c)$ とする

H は DE の中点より

$$\begin{cases} \frac{a+1}{2} = 1 \\ \frac{b+0}{2} = 0 \\ \frac{c+1}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\therefore a = 1, \quad b = -2, \quad c = 1$$

$$\therefore E(1, -2, 1)$$

IV. 平面 OAB 上の点 $E \in P(x, y, z)$ とする

$$\vec{OE} = s\vec{OA} + t\vec{OB} \quad (s, t: \text{実数})$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore \begin{cases} x = s + 2t \\ y = 2s - 2t \\ z = t \end{cases}$$

$\vec{OP} \perp \vec{OA}$ である $\vec{OP} \cdot \vec{OA} = 0$ より

$$-(-s+2t) + 2(2s-2t) + 1 \cdot t = 0$$

$$5s-3t = -1 \dots ①$$

$\vec{OP} \perp \vec{OB}$ である $\vec{OP} \cdot \vec{OB} = 0$ より

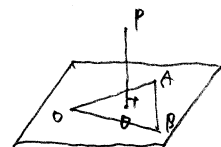
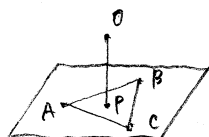
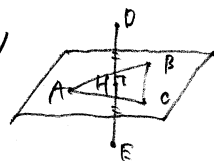
$$2(-s+2t) - 2(2s-2t) + 1 \cdot (t-2) = 0$$

$$6s-9t = -2 \dots ②$$

①, ②より

よって

$$s = \frac{p+2}{3}, \quad t = \frac{4p+8}{9} \quad Q$$



2) 2点A, Bの間に点Pは存在する

$$\vec{OP} = s\vec{OA} + t\vec{OB}, \quad s, t \geq 0, \quad s+t \leq 1$$

d) ≤ 7

$$\begin{cases} \frac{p+2}{2} \geq 0 & \therefore p \geq -2 \\ \frac{4p+8}{9} \geq 0 & \therefore p \geq -2 \\ \frac{p+2}{2} + \frac{4p+8}{9} \leq 1 \end{cases}$$

$$7(p+2) \leq 9 \quad \therefore p \leq -\frac{5}{7}$$

よって

$$-2 \leq p \leq -\frac{5}{7}$$

[5]

d) $|\vec{AB}| = 9$ より

$$|\vec{q} - \vec{a}| = 9$$

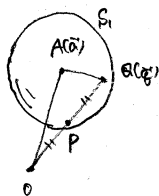
$$\vec{q} = \vec{OP} \text{ より}$$

$$|\vec{OP} - \vec{a}| = 9$$

$$2|\vec{p} - \frac{\vec{a}}{2}| = 9$$

$$\therefore |\vec{p} - \frac{\vec{a}}{2}| = \frac{9}{2}$$

Pは半径 $\frac{9}{2}$ の中心が $(0, 9, 0)$ の球面上に存在



$$\text{中心が } \vec{a} \text{ の球 } S_1: |\vec{p} - \frac{\vec{a}}{2}| = \frac{9}{2}$$

$\vec{v}(\vec{a}), \vec{v}(\vec{a})$ とおける

$$\vec{v} = \frac{\vec{q} + \vec{a}}{2}$$

$$\therefore \vec{q} = 2\vec{v} - \vec{a}$$

$$|\vec{q} - \vec{a}| = 9 \text{ より}$$

$$|2\vec{v} - \vec{a} - \vec{a}| = 9$$

$$2|\vec{v} - \frac{\vec{a}}{2}| = 9$$

$$\therefore |\vec{v} - \frac{\vec{a}}{2}| = \frac{9}{2}$$

S_2 は中心が $(0, 4, 2)$ とおける

$$x^2 + (y - \frac{1}{2})^2 + z^2 = \frac{9}{4} \quad \text{--- ②}$$

①-②より

$$-7y + \frac{11}{4} = \frac{27}{4} \quad \therefore y = \frac{23}{7}$$

(1)より

$$C_2 \text{ の中心は } (0, \frac{23}{7}, 0)$$

$$\text{半径は } \frac{\sqrt{15}}{7}$$

$$6 - \frac{23}{7} = \frac{19}{7}$$

$$\sqrt{3^2 - (\frac{19}{7})^2} = \frac{\sqrt{15}}{7}$$

$$= \frac{\sqrt{15}}{7} = \frac{\sqrt{15}}{7}$$

$$2.40$$

[6]

d) $\vec{p} = (\frac{x}{4})$ とおける

$$\begin{cases} x = -t + 6 \\ y = t + 3 \\ z = 4t + 4 \end{cases}$$

この直線と $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-6)^2 = 9$ と交点

$$(t-4)^2 + (t-1)^2 + (4t-10)^2 = 9$$

$$18t^2 - 90t + 108 = 9$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

$$(t-2)(t-3) = 0 \quad \therefore t = 2, 3$$

$P(3, 6, 8), Q(4, 5, 4)$

$$\vec{CP} = (\frac{1}{2}), \vec{CQ} = (\frac{2}{-2})$$

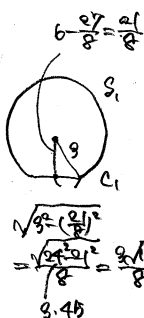
$\vec{CP} \cdot \vec{CQ} = 0$ より $\vec{CP} \perp \vec{CQ}$ であり、 $\angle PCQ = 90^\circ$

①-②より

$$-6y + 27 = \frac{27}{4} \quad \therefore y = \frac{27}{8}$$

$$C_2 \text{ の中心は } (0, \frac{27}{8}, 0)$$

$$\text{半径は } \frac{3\sqrt{15}}{8}$$



$$\sqrt{3^2 - (\frac{27}{8})^2} = \frac{3\sqrt{15}}{8}$$

$$= \frac{3\sqrt{15}}{8} = \frac{3\sqrt{15}}{8}$$

$$3.45$$

7.

I. ① $\vec{AP} \perp \vec{a}$ かつ $\vec{AP} \cdot \vec{a} = 0$ より

$$(x-3) + 2(y-7) + 2(z-5) = 0$$

$$\therefore x + 2y + 2z - 27 = 0$$

② $\vec{OH} = k\vec{a}$ (k : 定数) より

$$= \begin{pmatrix} k \\ 2k \\ 2k \end{pmatrix} \quad \therefore H(k, 2k, 2k)$$

H は平面 α 上の点より

$$k + 4k + 4k - 27 = 0 \quad \therefore k = 3$$

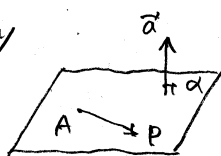
$$\therefore H(9, 6, 6)$$

③ $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

中 $(0, 0, 0)$ を半径 5 の球面

$$OH = \sqrt{9^2 + 6^2 + 6^2} = 9 > 5$$

交点がないから 12 点



II. $A(1, 0, 0)$ から平面 π への下りた最短の距離は $2\sqrt{3}$

$$\vec{AH} = \begin{pmatrix} s+t \\ -1+2t \\ a-s+t \end{pmatrix}$$

$$\vec{AH} \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$(s+t) - (a-s+t) = 0$$

$$2s - a = 0 \quad \therefore s = \frac{a}{2}$$

$$\vec{AH} \perp \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ より}$$

$$(s+t) + 2(-1+2t) + (a-s+t) = 0$$

$$6t - 2 + a = 0 \quad \therefore t = \frac{2-a}{6}$$

$\therefore$

$$\vec{AH} = \begin{pmatrix} \frac{a+1}{3} \\ -\frac{a+1}{3} \\ \frac{a-1}{3} \end{pmatrix} \quad \therefore |\vec{AH}| = \sqrt{3} \cdot \frac{|a+1|}{3}$$

S は π 上の点 P であるから

$$|\vec{AH}| \leq 2 \text{ より}$$

$$\sqrt{3} \cdot \frac{|a+1|}{3} \leq 2$$

$$|a+1| \leq 2\sqrt{3}$$

$$-2\sqrt{3} \leq a+1 \leq 2\sqrt{3}$$

$$\therefore -2\sqrt{3} - 1 \leq a \leq 1 + 2\sqrt{3}$$

8.

I. ① $p+q+r=1$

$$\text{② } p+q=1, 0 \leq p, q \leq 1, r=0$$

$$\begin{aligned} \text{③ } \vec{OX} &= k\left(\frac{1}{3}\vec{OA} + \frac{1}{3}\vec{OB} + \frac{1}{3}\vec{OC}\right) \\ &= \frac{k}{3}\vec{OA} + \frac{k}{3}\vec{OB} + \frac{k}{3}\vec{OC} \end{aligned}$$

$\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ は 1 次独立より

$$p = \frac{k}{3}, q = \frac{k}{3}, r = \frac{k}{3}$$

$k \in \mathbb{R}$ より

$$p=q=r$$

④ $r=1$

$$\text{⑤ } \vec{OX} = \vec{OA} + s\vec{AB} + t\vec{AC}, s+t \leq 1, s \geq 0, t \geq 0$$

$$= \vec{OA} + s(\vec{OB} - \vec{OA}) + t(\vec{OC} - \vec{OA})$$

$$= (1-s-t)\vec{OA} + s\vec{OB} + t\vec{OC}$$

$\vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC}$ は 1 次独立より

$$p = 1-s-t, q=s, r=t \quad \therefore p+q+r=1$$

$$\therefore s+t=1-p$$

$$s+t \leq 1, s \geq 0, t \geq 0 \text{ より}$$

$$1-p \leq 1, q \geq 0, r \geq 0$$

$$\therefore p \geq 0, q \geq 0, r \geq 0$$

II. $\vec{OP} = \alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB} + \gamma\vec{OC}$

$$= (1-\gamma-2\gamma)\vec{OA} + \gamma\vec{OB} + 2\gamma\vec{OC}$$

$$= \vec{OA} + \gamma(\vec{OB} - \vec{OA}) + 2\gamma\left(\frac{1}{2}\vec{OC} - \vec{OA}\right)$$

$$\vec{OB} = \frac{1}{2}\vec{OC} \text{ より}$$

$$= \vec{OA} + \gamma\vec{AB} + 2\gamma\vec{AD}$$

$$\alpha = 1-\gamma-2\gamma, \alpha \geq 0 \text{ より}$$

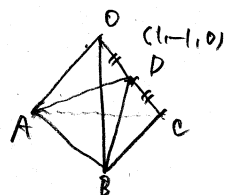
$$1-\gamma-2\gamma \geq 0$$

$$\therefore \gamma + 2\gamma \leq 1, \gamma \geq 0, 2\gamma \geq 0$$

$\therefore P$ は平面 ABD 上の点

面積の比より

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AD}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AD})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{6 \cdot 1 - (-1)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \end{aligned}$$



$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{AD} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

<point>

1. 全長/全長