

基本問題演習 39. 空間ベクトル

□

I. ① $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ より

$$|\vec{AB}| = \sqrt{2}$$

$$\vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{AC}| = 3$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = (-1) \cdot (-1) + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 3$$

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| |\vec{AC}| \cos \angle BAC$$

$$\cos \angle BAC = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|}$$

$$= \frac{3}{2 \cdot 3} = \frac{1}{2}$$

$$0^\circ < \angle BAC < 180^\circ \text{ より}$$

$$\angle BAC = 60^\circ$$

② $\triangle ABC$ の面積 S は $S = \frac{1}{2} |\vec{AB}| |\vec{AC}| \sin \angle BAC$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\vec{AB}|^2 |\vec{AC}|^2 - (\vec{AB} \cdot \vec{AC})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2 \cdot 9 - 3^2} = \frac{3}{2}$$

$$= \frac{3}{2} \text{ 〃}$$

③ 平面 ABC の法線ベクトル $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ とする

$$\vec{AB} \perp \vec{n} \text{ であるから } \vec{AB} \cdot \vec{n} = 0 \text{ より}$$

$$-a + c = 0 \dots ①$$

$$\vec{AC} \perp \vec{n} \text{ であるから } \vec{AC} \cdot \vec{n} = 0 \text{ より}$$

$$-a + 2b + 2c = 0 \dots ②$$

$$|\vec{n}| = 1 \text{ であるから } |\vec{n}|^2 = 1 \text{ より}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \dots ③$$

$$① \text{ より } c = a$$

$$② \text{ より } b = -\frac{a}{2}$$

$$③ \text{ より}$$

$$\frac{9}{4} a^2 = 1$$

$$a^2 = \frac{4}{9} \therefore a = \pm \frac{2}{3}$$

$$\therefore \vec{n} = \pm \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} = \pm \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ 〃}$$

II. $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \frac{\pi}{4}$ より

$$s+1 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2s^2+1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$s+1 = \sqrt{2s^2+1}$$

$$(s+1)^2 = 2s^2+1, s+1 \geq 0$$

$$s^2 - 2s = 0, s \geq -1 \therefore s = 0, 2 \text{ 〃}$$

<point>

1. 内積

②

$$\text{① } \vec{a} + t\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+2t \\ -1+t \\ 2-t \end{pmatrix}$$

$$|\vec{a} + t\vec{b}| = \sqrt{(3+2t)^2 + (-1+t)^2 + (2-t)^2}$$

$$= \sqrt{9t^2 + 12t + 14}$$

$$= \sqrt{9\left(t + \frac{2}{3}\right)^2 + 10}$$

$$t = -\frac{2}{3} \text{ であるとき } \vec{a} + t\vec{b} \text{ は } \sqrt{10}$$

[別解]

$$|\vec{a} + t\vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot t\vec{b} + |t\vec{b}|^2$$

$$= 9 + 2(2t - t)$$

$$= 9 + 2\left(t + \frac{2}{3}\right)^2 + 10$$

$$t = -\frac{2}{3} \text{ であるとき } \vec{a} + t\vec{b} \text{ は } \sqrt{10}$$

$$\text{② } |\vec{PE}| = \sqrt{(3+2t)^2 + (-1+t)^2 + (2-t)^2} = \sqrt{6}$$

$$|\vec{PE}| = \sqrt{6}$$

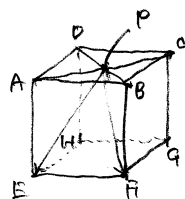
$$\vec{EF} = \vec{PF} - \vec{PE} \text{ より}$$

$$|\vec{EF}|^2 = |\vec{PF} - \vec{PE}|^2$$

$$|\vec{EF}|^2 = |\vec{PF}|^2 - 2\vec{PF} \cdot \vec{PE} + |\vec{PE}|^2$$

$$4 = 12 - 2\vec{PF} \cdot \vec{PE}$$

$$\therefore \vec{PF} \cdot \vec{PE} = 4$$



$$\text{③ } \vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c} \text{ とする}$$

$$\vec{DE} = \vec{OE} - \vec{OD}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{c} - \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right)$$

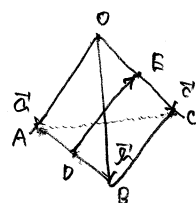
$$= -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\vec{DE} \cdot \vec{AC} = \left(-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) \cdot (\vec{c} - \vec{a})$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \left(\vec{a} \cdot \vec{c} - \frac{1}{2} \vec{c} \cdot \vec{a} - \frac{1}{2} \vec{b} \cdot \vec{c} + \frac{1}{2} \vec{b} \cdot \vec{a} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \text{ 〃}$$



<point>

1. 内積の計算

[3]

$$\vec{MN} = \vec{ON} - \vec{OM}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$|\vec{MN}| = \left| -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \right|$$

$$= \frac{1}{2}|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|$$

$$|\vec{MN}|^2 = \frac{1}{4}|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2$$

$$= \frac{1}{4}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a})$$

$$= \frac{1}{4}(3\ell^2) = \frac{\ell^2}{2} \quad \therefore |\vec{MN}| = \frac{\ell}{\sqrt{2}}$$

$\vec{MN}$ と $\vec{OB}$ のなす角を θ とする

$$\vec{MN} \cdot \vec{OB} = |\vec{MN}| |\vec{OB}| \cos \theta$$

より

$$\vec{MN} \cdot \vec{OB} = \left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}\right) \cdot \vec{b}$$

$$= -\frac{1}{2}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{b} \cdot \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} \cdot \vec{b}$$

$$= \frac{\ell^2}{2}$$

より

$$\cos \theta = \frac{\vec{MN} \cdot \vec{OB}}{|\vec{MN}| |\vec{OB}|}$$

$$= \frac{\frac{\ell^2}{2}}{\frac{\ell}{\sqrt{2}} \ell} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$0 \leq \theta \leq \pi \text{ より } \theta = \frac{\pi}{4}$$

<point>

1. 空間図形の計算

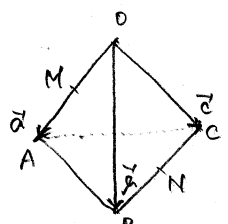
[4]

[1] $\vec{DP} : \vec{PF} = t : (1-t)$ とおくと

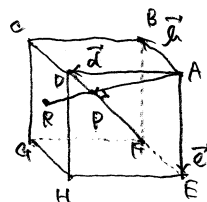
$$\vec{AP} = (1-t)\vec{AD} + t\vec{AF}$$

$$= (1-t)\vec{a} + t(\vec{b} + \vec{c})$$

$$= t\vec{b} + (1-t)\vec{a} + t\vec{c}$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \frac{\ell^2}{2}$$



$$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{AP} \perp \vec{DF} \text{ であるから } \vec{AP} \cdot \vec{DF} = 0 \text{ より}$$

$$\vec{DF} = \vec{AF} - \vec{AD} = \vec{b} + \vec{c} - \vec{a}$$

$$\vec{AP} \cdot \vec{DF} = \{t\vec{b} + (1-t)\vec{a} + t\vec{c}\} \cdot (\vec{b} - \vec{a} + \vec{c})$$

$$= t(|\vec{b}|^2 + (1-t)(\vec{a} \cdot \vec{b}) + t|\vec{c}|^2)$$

$$= 3t - 1 = 0 \quad \therefore t = \frac{1}{3}$$

より

$$\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{c}$$

[2] A, P, R は同一平面にあるから

$$\vec{AR} = k\vec{AP}$$

$$= \frac{k}{3}\vec{b} + \frac{2k}{3}\vec{a} + \frac{k}{3}\vec{c}$$

また R は平面 OBD 上にあるから

$$\vec{AR} = \alpha \vec{AC} + \beta \vec{AB} + \gamma \vec{AO}, \quad \alpha + \beta + \gamma = 1$$

$$= \alpha(\vec{b} + \vec{c}) + \beta \vec{a} + \gamma(\vec{a} + \vec{b})$$

$$= \alpha \vec{b} + (\alpha + \beta + \gamma) \vec{a} + \gamma \vec{c}$$

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は 1 次独立だから

$$\begin{cases} \alpha = \frac{k}{3} \\ \alpha + \beta + \gamma = \frac{2k}{3} \\ \gamma = \frac{k}{3} \end{cases} \quad \therefore \beta = 0$$

$$\alpha + \beta + \gamma = 1 \text{ より}$$

$$\frac{2k}{3} = 1 \quad \therefore k = \frac{3}{2}$$

より

$$\vec{AR} = \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\text{II. } \vec{PR} = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b})$$

$$\vec{PS} = \frac{1}{2}\vec{a}$$

$$\vec{PR} = \vec{AR} - \vec{AP}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$$

$$= \vec{PR} \text{ より}$$

4点 P, Q, R, S は同一平面にあるから

また 4点 P, Q, R, S は同一平面にあるから

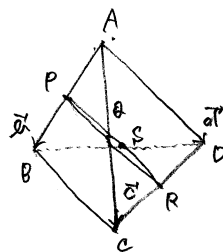
正四面体 ABCD の中心を O とすると

$$|\vec{PO}| = |\vec{SO}| = \ell$$

$$\vec{PO} \cdot \vec{PS} = \frac{1}{2}(\vec{c} - \vec{b}) \cdot \frac{1}{2}\vec{a} = \frac{1}{4}(\vec{c} \cdot \vec{a} - \vec{b} \cdot \vec{a}) = 0$$

$$\text{より } \vec{PO} \perp \vec{PS}$$

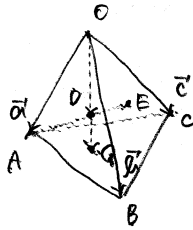
より 4点 P, Q, R, S は正四面体である



[5]

I. ①, $\triangle ABC$ の面積を S と

$$S = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 \cdot \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}$$



$$\begin{aligned} \text{② } \vec{OG} \cdot \vec{AB} &= \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \right) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= -\frac{1}{3}|\vec{a}|^2 + \frac{1}{3}|\vec{b}|^2 + \frac{1}{3}\vec{b} \cdot \vec{c} - \frac{1}{3}\vec{c} \cdot \vec{a} = 0 \end{aligned}$$

$\therefore \vec{OG} \perp \vec{AB}$

$$\begin{aligned} \vec{OG} \cdot \vec{AC} &= \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \right) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore \vec{OG} \perp \vec{AC}$

$\therefore \vec{OG} \perp \text{平面 } ABC$ 也

$$\begin{aligned} \text{③ } \vec{AD} &= \vec{OD} - \vec{OA} \\ &= \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c} - \vec{a} \\ &= -\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c} \\ \vec{AE} &= \vec{OE} - \vec{OA} \\ &= -\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c} \end{aligned}$$

$$\vec{AD} = \frac{3}{4}\vec{AE}$$

$\therefore AD:DE = 3:1$

対称性より $OG = AE$ より

$$OG = DE$$

$$\begin{aligned} \text{④ } \triangle ABC \text{ の外接円の半径を } R \text{ と } \quad & \begin{cases} OG = DE \text{ かつ} \\ PG \perp \text{平面 } ABC \\ PE \perp \text{平面 } OBC \text{ かつ} \end{cases} \\ |\vec{OG}|^2 &= \left| \frac{1}{3}\vec{OG} \right|^2 \\ &= \frac{1}{16} \left| \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \right|^2 \\ &= \frac{1}{16} \left(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 2\vec{b} \cdot \vec{c} + 2\vec{c} \cdot \vec{a} \right) \\ &= \frac{9}{3} \end{aligned}$$

$$\therefore |\vec{OG}| = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

その体積を

$$\frac{4}{3}\pi \left(\frac{\sqrt{6}}{2} \right)^3 = \frac{8\sqrt{6}}{27}\pi$$

II. $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$ とする

$$\vec{OD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

$$\begin{aligned} \vec{OD} \cdot \vec{AB} &= (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{b} - \vec{a}) \\ &= -|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore \vec{OD} \perp \vec{AB}$

$$\begin{aligned} \vec{OD} \cdot \vec{AC} &= (\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \cdot (\vec{c} - \vec{a}) \\ &= -|\vec{a}|^2 + |\vec{c}|^2 + \vec{b} \cdot \vec{c} - \vec{c} \cdot \vec{a} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$\therefore \vec{OD} \perp \vec{AC}$

$\therefore \vec{OD} \perp \text{平面 } ABC$

<point>

1. 直線と平面の直交

[6]

① $\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c}$ とする

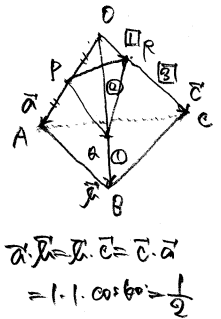
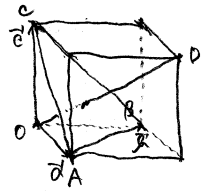
$$\begin{aligned} \vec{PB} &= \vec{OB} - \vec{OP} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{PR} &= \vec{OR} - \vec{OP} \\ &= -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{PB}|^2 &= \left| -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 - \frac{2}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{4}{9}|\vec{b}|^2 \\ &= \frac{13}{36} \\ \therefore |\vec{PB}| &= \frac{\sqrt{13}}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\vec{PR}|^2 &= \left| -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c} \right|^2 \\ &= \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{4}\vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{1}{16}|\vec{c}|^2 \\ &= \frac{5}{16} \\ \therefore |\vec{PR}| &= \frac{\sqrt{5}}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{② } \vec{PB} \cdot \vec{PR} &= \left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{c} \right) \\ &= \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{8}\vec{a} \cdot \vec{c} + \frac{1}{3}\vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= \frac{5}{48} \end{aligned}$$



② $\triangle PQR$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{PQ}| |\overrightarrow{PR}|^2 - (\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR})^2} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{13}{96} \cdot \frac{3}{16} - \frac{5^2}{48^2}} \\ &= \frac{1}{24} \sqrt{\frac{13 \cdot 3 \cdot 4 - 25}{48^2}} = \frac{\sqrt{13}}{96} \end{aligned}$$

[7]

I. $\vec{u}$ $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2$

② $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| |\vec{AC}| \cos \angle BAC$ より

$$\begin{aligned} \cos \angle BAC &= \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} \\ &= \frac{2}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$0 < \angle BAC < \pi$ より

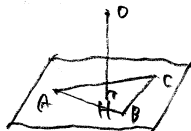
$\angle BAC = \frac{\pi}{6}$

③ $\triangle ABC$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{6} \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

④ $\vec{OH} \perp \vec{AB}$ であるから $\vec{OH} \cdot \vec{AB} = 0$ より

$$\begin{aligned} \vec{OH} \cdot \vec{AB} &= (s\vec{OA} + t\vec{AB} + r\vec{AC}) \cdot \vec{AB} \\ &= s\vec{OA} \cdot \vec{AB} + t|\vec{AB}|^2 + r\vec{AC} \cdot \vec{AB} \\ &= 1 + 2s + 3t = 0 \dots \textcircled{1} \end{aligned}$$



$\vec{OH} \perp \vec{AC}$ であるから $\vec{OH} \cdot \vec{AC} = 0$ より

$$\begin{aligned} \vec{OH} \cdot \vec{AC} &= (s\vec{OA} + t\vec{AB} + r\vec{AC}) \cdot \vec{AC} \\ &= s\vec{OA} \cdot \vec{AC} + t\vec{AB} \cdot \vec{AC} + r|\vec{AC}|^2 \\ &= 1 + 3s + 6r = 0 \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①, ② より

$$s = -1, r = \frac{1}{3}$$

⑤ $\vec{OH} = s\vec{OA} + t\vec{AB} + r\vec{AC}$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

$|\vec{OH}| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$

⑥ 四面体の体積 V は

$$V = \frac{1}{6} \sqrt{\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

II. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{c} = \vec{u} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

① H は $\triangle PBC$ の外心であり

正四面体の外心と重心は一致するから

H は $\triangle PBC$ の重心であり

$$\vec{PH} = \frac{1}{3} \vec{PB} + \frac{1}{3} \vec{PC}$$

② $\vec{AH} = \vec{PH} - \vec{PA}$ より

$$\begin{aligned} |\vec{AH}|^2 &= \left| \frac{1}{3} \vec{PB} + \frac{1}{3} \vec{PC} - \vec{PA} \right|^2 \\ &= \left| \vec{PA} + \frac{1}{3} |\vec{PA}|^2 + \frac{1}{3} |\vec{PA}|^2 - \frac{2}{3} \vec{PA} \cdot \vec{PB} + \frac{2}{3} \vec{PA} \cdot \vec{PC} - \frac{2}{3} \vec{PB} \cdot \vec{PC} \right|^2 \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$\therefore |\vec{AH}| = \frac{\sqrt{6}}{3}$

正四面体 $PABC$ の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \triangle PBC \cdot |\vec{AH}| \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin 60^\circ \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{12} \end{aligned}$$

III. $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

$$\cos \theta = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{|\vec{AB}| |\vec{AC}|} = \frac{-6}{\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6}} = -\frac{1}{2} \quad \therefore \theta = 120^\circ$$

$\triangle ABC$ の面積 S は $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6} \cdot \sin 120^\circ = 3\sqrt{3}$$

② $\vec{AB}$ と $\vec{AC}$ の内積は $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = -6$ であり、 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする

$\vec{a} \perp \vec{AB}$ であるから $\vec{a} \cdot \vec{AB} = 0$ より

$$2a + b + c = 0 \dots \textcircled{1}$$

$\vec{a} \perp \vec{AC}$ であるから $\vec{a} \cdot \vec{AC} = 0$ より

$$-2a + 2b - 4c = 0$$

$$a - b + 2c = 0 \dots \textcircled{2}$$

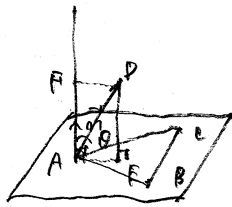
①, ② より

$$c = -a, b = -a$$

$\therefore \vec{a}$ の方向は $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ($a=1$)

③ $\vec{AB}$ と $\vec{a}$ のなす角 θ を求めよ

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\vec{AB} \cdot \vec{a}}{|\vec{AB}| |\vec{a}|} \\ &= \frac{3}{\sqrt{21} \cdot \sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{7}}\end{aligned}$$



$$BF = AF = AB \cos\theta = \sqrt{21} \cdot \frac{1}{\sqrt{7}} = \sqrt{3} //$$

④ $\Delta ABCD$ の体積 V を

$$V = \frac{1}{3} \cdot 2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 2 //$$

<point>

1. 四面体の体積を求めよ

⑧

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} - 4\vec{OG} = \vec{0}$$

ΔAMH と ΔBGH は

$$\omega + \theta = \pi$$

$$\therefore \theta = \pi - \omega$$

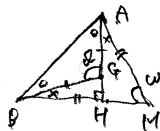
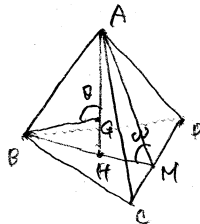
$$\vec{GA} \cdot (\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD}) = 0$$

$$= |\vec{GA}|^2 + 3|\vec{GA}|^2 \cos\theta = 0$$

$$\therefore \cos\theta = -\frac{1}{3}$$

$$\cos\omega = \cos(\pi - \theta)$$

$$= -\cos\theta = \frac{1}{3}$$

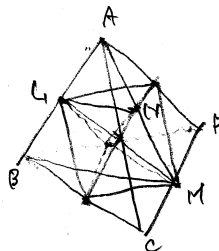


$$\omega + \phi = \pi$$

$$\therefore \phi = \pi - \omega$$

$$\cos\phi = \cos(\pi - \omega)$$

$$= -\cos\omega = -\frac{1}{3}$$



※ ①, ②

2. 1辺の長さが1の正四面体

$\frac{1}{2}$ の正四面体の体積を求めよ

$$Q: 1$$

で表すと

1辺の長さが1の正四面体の体積を求めよ

1

$$Q: 1 \cdot 2^3 = 8 //$$

