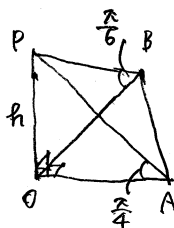


基本問題演習 12. 空間図形

[1]

$$\begin{aligned} \text{d) } OA &= h \\ OB &= \sqrt{3}h \\ AB &= 2h \end{aligned}$$



$$\text{e) } PA = \sqrt{2}h, PB = 2h$$

$\triangle PAB$ に余弦定理より

$$(2h)^2 = (\sqrt{2}h)^2 + (\sqrt{2}h)^2 - 2 \cdot \sqrt{2}h \cdot \sqrt{2}h \cos \angle APB$$

$$\therefore \cos \angle APB = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad \sin \angle APB = \frac{\sqrt{14}}{4}$$

$\triangle PAB$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}h \cdot \sqrt{2}h \cdot \sin \angle APB \\ &= \frac{\sqrt{7}}{2} h^2 \end{aligned}$$

[2]

$$AC = 4$$

$$AF = \sqrt{5+12} = \sqrt{17}$$

$$FC = \sqrt{4+5} = 3$$

$\triangle AFC$ に余弦定理より

$$17 = 9 + 16 - 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{1}{3} \quad \sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{3}$$

$\triangle AFC$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 \cdot \sin \theta \\ &= 4\sqrt{5} \end{aligned}$$

四面体の体積より

$$\frac{1}{3} \cdot S \cdot BP = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5}$$

$$\therefore BP = \frac{\sqrt{30}}{4}$$

表面積 S は

$$S = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{5} \cdot \sin 60^\circ = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

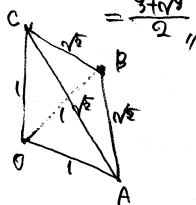
[3]

$$\angle AOC = \angle BOC = 90^\circ \text{ より}$$

$$OC \perp \text{平面 } ABC$$

四面体の体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{6}$$



<point>

1. 四面体の体積 (高さを見よう)

[4]

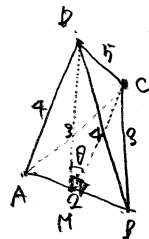
$$\text{d) } CM = 2\sqrt{6}$$

$$DM = \sqrt{15}$$

$\triangle CDM$ に余弦定理より

$$25 = 8 + 15 - 2 \cdot 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{15} \cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta = -\frac{\sqrt{30}}{60}$$



e) $AB \perp MC, AB \perp MD$ より

$AB \perp \text{平面 } MCD$

四面体の体積 V は

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{15} \sin \theta \cdot 2 \\ &= \frac{\sqrt{119}}{9} \end{aligned}$$

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{3570}}{60}$$

[5]

d) $\triangle ABC$ に余弦定理より

$$19 = 25 + 36 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos \angle BAC$$

$$\therefore \cos \angle BAC = \frac{4}{5}$$

$$\sin \angle BAC = \frac{3}{5}$$

$\triangle ABC$ の面積 S は

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 \cdot \sin \angle BAC \\ &= 9 \end{aligned}$$

$$DA = DB = DC \text{ より}$$

e) D から $\triangle ABC$ に垂線を下ろすと

垂線の足 H は $\triangle ABC$ の外心である

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R とすると

正弦定理より

$$2R = \frac{\sqrt{13}}{\sin \angle BAC} = \frac{5\sqrt{13}}{3}$$

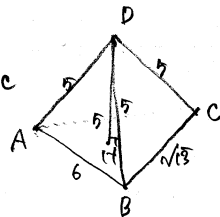
$$\therefore R = \frac{5\sqrt{13}}{6}$$

$\triangle AHD$ に三平方の定理より

$$\begin{aligned} DH &= \sqrt{R^2 - \left(\frac{5\sqrt{13}}{6}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{6^2 \cdot 5^2 - 5^2 \cdot 13}{6^2}} = \frac{5\sqrt{23}}{6} \end{aligned}$$

$\therefore$ 四面体 $ABCD$ の体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot \frac{5\sqrt{23}}{6} = \frac{5\sqrt{23}}{2}$$



<point>

1. 三辺の原理

$$PA=PB=PC \text{ のこと}$$

P から $\triangle ABC$ まで下ろした垂線の足は

$\triangle ABC$ の外心である

[証明]

$\triangle PAH, \triangle PBH, \triangle PCH$ は

直角三角形である

$$PA=PB=PC$$

PH (共通)

斜辺が等しいから

$$\triangle PAH \cong \triangle PBH \cong \triangle PCH$$

よって

$$AH=BH=CH \quad \square$$

[6]

d) $AB=AC=AD$ より

H は $\triangle BCD$ の外心である

$\triangle ABC$ の外接円の半径を R

とすると正弦定理より

$$2R = \frac{b}{\sin 60^\circ} = \frac{6}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\therefore R = 2\sqrt{3} = HD$$

$\triangle AHD$ で三平方の定理より

$$AH = \sqrt{6^2 - (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

$$\text{e) } \cos \theta = \frac{PH}{AD} = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

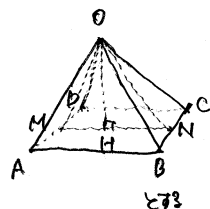
f) 正四面体の体積 V は

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 6 \cdot \sin 60^\circ \times 2\sqrt{3} = 18\sqrt{2}$$

[7]

$$d) ON = \sqrt{OB^2 - BN^2} = 2$$

$$OH = \sqrt{ON^2 - HN^2} = \sqrt{3}$$

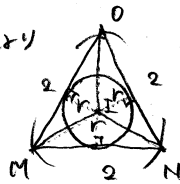


g) 1/4 接球の半径を r とすると

$$\triangle OMN = \triangle OMH + \triangle MNI + \triangle NOI$$

$$\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} = \frac{1}{2} (2+2+2)r$$

$$3r = \sqrt{3} \quad \therefore r = \frac{\sqrt{3}}{3}$$



$$\text{h) 表面積 } 4\pi \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{体積 } \frac{4\pi}{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 = \frac{4\pi}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{9} = \frac{4\sqrt{3}\pi}{27}$$

[8]

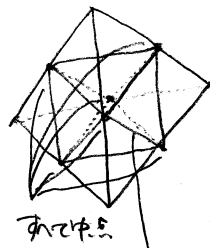
図のように正四面体に

正四面体をうめこんでいく

$$T \text{ の体積} : \text{O の体積} = 1 : \frac{1}{2}$$

よって

$$T \text{ の体積} : \text{O の体積} = 1 : 4$$



(2) の長さは

T の $\frac{1}{2}$

相似の相似比

$$\frac{1}{8} \quad (\text{相似比} = 2 : 1 \text{ のとき})$$

<point>

1. 正四面体と正四面体