

高2数学 基本問題演習 38. 空間ベクトル(1)

① [I . 2012 駒澤大 II . 2014 岡山理科大]

I . 空間における点 P の座標を $(5, -6, 2)$ とするとき、点 P と x 軸に関して対称な点の座標は ア であり、点 P と yz 平面に関して対称な点の座標は イ であり、点 P と点 $(2, -1, 5)$ に関して対称な点の座標は ウ である。

II . 3 点 A $(0, 1, -2)$, B $(2, 3, -2)$, C $(0, 3, 0)$ について、次の点の座標をそれぞれ求めよ。

- (1) $\triangle ABC$ の重心 G
- (2) 3 点 A, B, C から等距離にある xy 平面上の点 D
- (3) (1) で求めた G と (2) で求めた D に対して、線分 GD を $1:3$ に内分する点

② [I . 明治学院大 II . 福島県立医科大 III . 早稲田大 IV . 千葉工業大]

I . 2 点 A $(1, 2, 4)$ および B $(-5, 8, -2)$ を直径の両端とする球面の方程式は ア であり、その球の体積は イ である。また、この球に内接する立方体の体積は ウ 、外接する立方体の体積は エ になる。

II . 空間の点 A $(1, -3, -2)$, B $(-2, 3, 1)$ について、 $AP=2BP$ を満たす点 P の全体はどのような図形になるか。

III . 座標空間内に xy 平面と交わる半径 5 の球がある。その球の中心の z 座標の値が正であり、その球と xy 平面の交わりが作る円の方程式が

$$x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$$

であるとき、その球の中心の座標を求めよ。

IV . 座標空間内に 2 つの球 $S_1: x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y + 8z + 27 = 0$,

$S_2: x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$ (R は正の定数) があり、 S_2 は S_1 の中心を通っている。

- (1) S_1 の中心の座標と半径をそれぞれ求めよ。
- (2) S_2 の半径 R を求めよ。
- (3) S_1 と S_2 の交わりの円の半径を求めよ。

高2数学 基本問題演習 38. 空間ベクトル(1)

3 [I . 2012 明治大 II . 1996 中央大]

I . 四面体 ABCD において、2 辺 AC, BD の中点をそれぞれ M, N とする。また、 $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。

(1) $\overrightarrow{MN}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ で表すと、 $\overrightarrow{MN}=\text{ }^{\text{ア}}\boxed{}$ となる。

(2) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\text{ }^{\text{イ}}\boxed{}\overrightarrow{MN}$ である。

II . 四面体 OABC がある。線分 AB を 2:3 に内分する点を P, 線分 OP を 10:1 に外分する点を Q, 線分 CQ を 3:1 に内分する点を R とする。このとき、 $\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ を用いて表せ。

4 [I . 1999 立教大 II . 2009 静岡大]

I . 3 点 A(2, 3, 4), B(3, -2, -1), C(m, n, 5) が同一直線上にあるとき、m, n の値を求めよ。

II . 四面体 ABCD において、 $\triangle BCD$ の重心を G とする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{AG}$ をベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ で表せ。

(2) 線分 AG を 3:1 に内分する点を E, $\triangle ACD$ の重心を F とする。このとき、3 点 B, E, F は一直線上にあり、E は BF を 3:1 に内分する点であることを示せ。

5 [I . 2009 立教大 II . 2007 神戸大]

I . 4 点 A(1, 2, 3), B(2, 1, 0), C(3, 2, 1), D(-1, 2, z) が同一平面上にあるとき、z の値は $\boxed{}$ である。

II . 四面体 ABCD において、辺 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ O, P, Q, R とする。

(1) $\overrightarrow{OQ}$ を $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OR}$ を用いて表せ。

(2) 辺 AC, BD 上にそれぞれ任意に点 E, F をとるとき、線分 EF の中点は 4 点 O, P, Q, R を含む平面上にあることを証明せよ。

高2数学 基本問題演習 38. 空間ベクトル(1)

6 [(1) 2016 甲南大 (2) 岡山大]

(1) $\vec{a}=(-3, 0, 2)$, $\vec{b}=(1, 1, -1)$, $\vec{c}=(-1, 1, 0)$, $\vec{d}=(3, -2, 4)$ とすると,

$\vec{d}=k\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}$ (ただし, k, l, m は実数) と表すことができる。このとき,

$k=\boxed{}, l=\boxed{}, m=\boxed{}$ となる。

(2) 四面体 OABC において, 辺 AB の中点を E, 辺 OC を 2:1 に内分する点を F,

辺 OA を 1:2 に内分する点を P とする。また, Q を $\overrightarrow{BQ}=t\overrightarrow{BC}$ をみたす辺 BC 上の点とする。PQ と EF が交わる時, 実数 t の値を求めよ。

7 [I. 2019 高知大 II. 2000 岡山理科大 III. 2004 鹿児島大]

I. 四面体 OABC において $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。また, 辺 OA を 2:3 に内分する点を D, 辺 BC を 4:1 に内分する点を E とし, 線分 DE の中点を M とする。更に, 直線 OM と平面 ABC の交点を Q とする。

(1) 点 P が平面 ABC 上にあるとき, $s+t+u=1$ を満たす実数 s, t, u を用いて

$\overrightarrow{OP}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ と表されることを示せ。

(2) $\overrightarrow{OM}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。

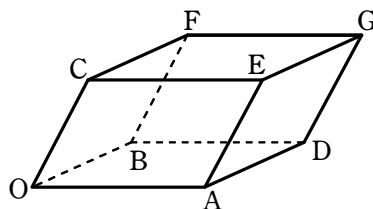
(4) OM:MQ を求めよ。

II. 右の図のような平行六面体 OADB-CEGF において, 辺 DG の延長上に $\overrightarrow{GM}=2\overrightarrow{DG}$ となるように点 M をとり, 直線 OM と平面 ABC の交点を N とする。

$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ とするとき

(1) $\overrightarrow{OM}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表せ。

(2) $\overrightarrow{ON}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表せ。



III. 四面体 ABCD がある。点 P が $10\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{PB}+2\overrightarrow{PC}+3\overrightarrow{PD}$ を満たしているとき

(1) $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ を用いて表せ。

(2) 直線 AP と三角形 BCD との交点を Q としたとき, 次の式を満たす実数 s, t, k を求めよ。
 $\overrightarrow{BQ}=s\overrightarrow{BC}+t\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}$

(3) 四面体 ABCD と四面体 PBCD の体積の比を求めよ。