

基本問題演習 2. 方程式・不等式の解法

[1]

$$ax+2=0 \Rightarrow x+a^2$$

$$(a-1)x=a^2-2$$

$$a) a=1 \text{ とき}$$

左辺=0, 右辺=-1 より 解なし

$$ii) a \neq 1 \text{ とき}$$

$$x = \frac{a^2-2}{a-1}$$

<point>

1. 方程式 $ax+b=0$

[2]

$$d) ax+3 > 2x$$

$$(a-2)x > -3$$

$$i) a-2 > 0, \text{ すなわち } a > 2 \text{ とき}$$

$$x > -\frac{3}{a-2}$$

$$ii) a-2=0 \text{ すなわち } a=2 \text{ とき}$$

左辺=0, 右辺=-3 より 全ての x が成り立つ。

x は $\mathbb{R}$ の任意の数

$$iii) a-2 < 0 \text{ すなわち } a < 2 \text{ とき}$$

$$x < -\frac{3}{a-2}$$

$$e) 2ax-1 \leq 4x$$

$$2(a-2)x \leq 1$$

$$i) a \neq 2 \text{ とき}$$

$$x \leq \frac{1}{2(a-2)}$$

$$x \geq -5 \text{ かつ } x \leq 13 \text{ かつ}$$

$$ii) a=2 \text{ とき}$$

x は $\mathbb{R}$ の任意の数と見做す。

$$x \geq -5 \text{ かつ } x \leq 13 \text{ かつ}$$

$$iii) a < 2 \text{ とき}$$

$$x \geq \frac{1}{2(a-2)}$$

$$x \geq -5 \text{ かつ } x \leq 13 \text{ かつ}$$

$$\frac{1}{2(a-2)} = -5$$

$$1 = -10(a-2)$$

$$10a = 19 \quad \therefore a = \frac{19}{10}$$

<point>

1. 不等式 $ax+b \geq 0$

[3]

共通解 $a(1) \in x=a$ と $a(2)$

$$\begin{cases} x^2-3x+m-1=0 \dots \textcircled{1} \\ x^2+(m-2)x-2=0 \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2}-\textcircled{1} \text{ より}$$

$$(m+1)x-m-1=0$$

$$(m+1)(x-1)=0$$

$$\therefore m=-1 \text{ or } x=1$$

$$i) m=-1 \text{ とき}$$

2つの共通解 $x=1$ かつ $x=2$ となる

$$ii) x=1 \text{ とき}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } m=3$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{ より}$$

$$\begin{cases} x^2-3x+2=0 & \therefore x=1, 2 \\ x^2+x-2=0 & \therefore x=1, -2 \end{cases}$$

$$iii) \text{ 以上より}$$

$$m=3. \text{ 共通解は } x=1$$

<point>

1. 2元方程式の共通解

[4]

$$d) i) a=0 \text{ とき}$$

$$bx+c=0 \quad bx=-c$$

$$b \neq 0 \text{ とき } x = -\frac{c}{b}$$

$$b=0 \text{ とき}$$

$c=0$ ならば x は $\mathbb{R}$ の任意の数

$c \neq 0$ ならば 解なし

$$ii) a \neq 0 \text{ とき}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$e) i) a=0 \text{ とき}$$

$$bx+c > 0 \quad bx > -c$$

$$b > 0 \text{ とき } x > -\frac{c}{b}$$

$$b < 0 \text{ とき } x < -\frac{c}{b}$$

$b=0$ とき $c > 0$ ならば x は $\mathbb{R}$ の任意の数

$c \leq 0$ 解なし

④ $a \neq 0$ とす

① $a > 0$ とす

$$D = b^2 - 4ac < 0$$

$$D > 0 \text{ とす } x < \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x > \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$D = 0 \text{ or } x = -\frac{b}{2a} \text{ だけ解がある}$$

$D < 0$ " x は $\mathbb{R}$ 上の定数

② $a < 0$ とす

$$D > 0 \text{ とす } -\frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < x < -\frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$D \leq 0$ とす 解なし //

⑤ ⑥ ⑦ 実数解 x があるとき

$$\begin{cases} x^2 - x + k = 0 \dots ⑦ \\ x^2 + x + 1 + k = 0 \dots ⑧ \end{cases}$$

⑧ - ⑦ より

$$2x + 1 = 0 \therefore x = -\frac{1}{2} \quad k = -\frac{3}{4}$$

⑤ ⑥ について判別式 D_1, D_2 とする

$$D_1 > 0 \text{ とす } 1 - 4k > 0 \therefore k < \frac{1}{4} \text{ とす } ⑦ \text{ の実数解}$$

$$D_1 = 0 \quad k = \frac{1}{4} \text{ " } ⑦ \text{ "}$$

$$D_1 < 0 \quad k > \frac{1}{4} \text{ " 実数解なし}$$

⑥ D_2

$$D_2 > 0 \text{ とす } 1 - 4(1+k) > 0 \therefore k < -\frac{3}{4} \text{ とす } ⑧ \text{ の実数解}$$

$$D_2 = 0 \quad k = -\frac{3}{4} \text{ " } ⑧ \text{ "}$$

$$D_2 < 0 \quad k > -\frac{3}{4} \text{ " 実数解なし}$$

以上より 与えられた連立方程式の解の組は

$$k < -\frac{3}{4} \text{ とす } 4 \text{ 組}$$

$$k = -\frac{3}{4} \text{ とす } 2 \text{ 組}$$

$$-\frac{3}{4} < k < \frac{1}{4} \text{ とす } 2 \text{ 組}$$

$$k = \frac{1}{4} \text{ とす } 1 \text{ 組}$$

$$k > \frac{1}{4} \text{ とす } 0 \text{ 組}$$

⑦

$$P(x) = 2x^2 + x^2(x-1) \text{ とおく}$$

$$P(x) = 0 \text{ より}$$

$$P(x) = (2x-1)(x^2+x+1)$$

$$P(x) = 0 \text{ の解は}$$

$$x = \frac{1}{2}, \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} \text{ or}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} 2 & 2 & 1 & 1 & -1 \\ & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}$$

<point>

1. 二次方程式

<point>

1. 方程式 $ax^2 + bx + c = 0$

2. 不等式 $ax^2 + bx + c > 0$

⑤

$$\begin{cases} x + (a-1)y = -1 \dots ① \\ ax + (a+3)y = 1 \dots ② \end{cases}$$

$$ax + ① - ② \text{ より}$$

$$|a(a-1) - (a+3)|y = -a-1$$

$$(a^2 - 2a - 3)y = -(a+1)$$

$$(a+1)(a-3)y = -(a+1)$$

$a = 3$ とす 解は存在せず

$a \neq 3$ とす 解は一意に存在する

<point>

1. 2元1次連立方程式の解

⑥ $\rightarrow$ 差を消す (消去法)

$$\begin{cases} y = x + k \dots ① \\ x = y + k \dots ② \end{cases}$$

$$① - ② \text{ より}$$

$$y - x = x + k$$

$$(x+y)(x-y) + (x-y) = 0$$

$$(x-y)(x+y+1) = 0$$

$$\therefore y = x \text{ or } y = -x - 1$$

① ②

① ~ ② より

$$x^2 - x + k = 0, y = x \text{ or}$$

$$x^2 + x + 1 + k = 0, y = -x - 1$$

8

d) $|2x-3|=5$

$2x-3=\pm 5$

$2x=8\pm 5$

$\therefore x=\frac{8\pm 5}{2} = \boxed{-1}, \boxed{4}$

e) $|x-\frac{3}{2}|<\sqrt{6}$

$-\sqrt{6}<x-\frac{3}{2}<\sqrt{6}$

$\therefore \frac{3}{2}-\sqrt{6}<x<\frac{3}{2}+\sqrt{6}$

$2.4<\sqrt{6}<2.5$

$\sqrt{5.76} \quad \sqrt{6.25}$

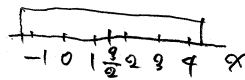
$\therefore$ 不等式を満たす整数 x の個数は $\boxed{4}$ 個

e) $|x-\frac{9}{2}|<n$

$\therefore -n+\frac{9}{2}<x<n+\frac{9}{2}$

整数解が 6 個 $\therefore$ 上の n は

$n=\boxed{2}$ である



<point>

1. 絶対値の入った方程式: 不等式 (1次)

9

d) $|x-1|=3x$ の解は

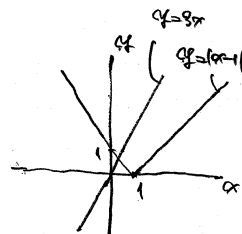
$y=|x-1|$ と $y=3x$ の交点の x の値を調べよう

x の値を調べよう

7-37 2/1

$-(x-1)=3x$

$4x=1 \quad \therefore x=\boxed{\frac{1}{4}}$



$y=|x-1|$
 $= \begin{cases} x-1 & (x \geq 1) \\ 1-x & (x < 1) \end{cases}$

e) $\sqrt{x^2+1}+\sqrt{(x-2)^2}=x+5$

$|x|+|x-2|=x+5$

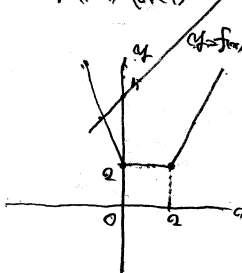
7-37 2/1

$-2x+2=x+5 \quad \therefore x=-1$

$2x-2=x+5 \quad \therefore x=7$

$\therefore$ 7

$x=\boxed{-1}, \boxed{7}$



$f(x)=|x|+|x-2|$ と $f(x)=x+5$
 $= \begin{cases} 2x-2 & (x \geq 2) \\ 2 & (0 \leq x < 2) \\ -2x+2 & (x < 0) \end{cases}$

e) $|2|x-3|-x-2|<0$

$|2|x-3|<x+2$

$-2x-3=x+2 \quad \therefore x=-\frac{5}{3}$

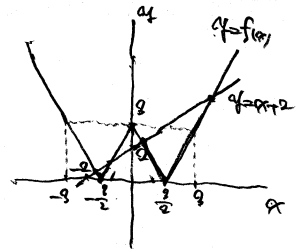
$2x+3=x+2 \quad \therefore x=-1$

$-2x+3=x+2 \quad \therefore x=\frac{1}{3}$

$2x-3=x+2 \quad \therefore x=5$

7-37 2/1

$-\frac{5}{3}<x<-1, \frac{1}{3}<x<5$



$f(x)=|2|x-3|-x-2|$
 $= \begin{cases} -2x-3 & (x < -\frac{5}{3}) \\ 2x+3 & (-\frac{5}{3} \leq x < -1) \\ -2x+3 & (-1 \leq x < \frac{1}{3}) \\ 2x-3 & (x \geq \frac{1}{3}) \end{cases}$

10

d) $x^2+2|x-3|\leq 0$

$|x^2+2|x-3||\leq 0 \quad \Leftarrow |x^2|=x^2$

$(|x|+2)(|x-3|)\leq 0$

$|x|\geq 0$ より

$0\leq |x|\leq 2$

$\therefore -2\leq x\leq 2$

e) $|x^2-1|+x=0$

$|x^2-1|=-x$

$x^2-1+x=0$ と $x^2-1-x=0$

$x^2+x-1=0$

$\therefore x=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

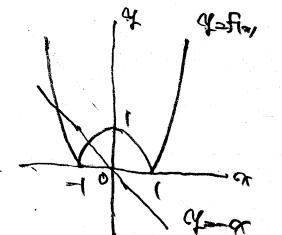
$x^2-1-x=0$ と $x^2-1+x=0$

$x^2-x-1=0$

$\therefore x=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

7-37 2/1

$x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$



$f(x)=|x^2-1|+x$
 $= \begin{cases} x^2-1 & (x \leq -1, x \geq 1) \\ -x^2 & (-1 < x < 1) \end{cases}$

e) $|x^2-x-6|=4x^2$
 $(x+2)(x-3)=4x^2$

$-x^2-x+6=4x^2$ と $x^2-x-6=4x^2$

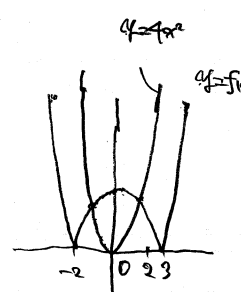
$5x^2-x-6=0 \quad \frac{1}{5}x-\frac{6}{5}$

$(5x+1)(x-6)=0$

$\therefore x=-1, \frac{6}{5}$

7-37 2/1

$x=-1, \frac{6}{5}$



$f(x)=|x^2-x-6|$ と $f(x)=4x^2$
 $= \begin{cases} x^2-x-6 & (x \leq -2, x \geq 3) \\ -x^2+x+6 & (-2 < x < 3) \end{cases}$

[2110]I

$$|x^2 - x - 6|, 4x^2 \geq 0 \text{ かつ}$$

$$|x^2 - x - 6|^2 = (4x^2)^2$$

$$(x^2 - x - 6)^2 - (4x^2)^2 = 0$$

$$(x^2 - x - 6 + 4x^2)(x^2 - x - 6 - 4x^2) = 0$$

$$(5x^2 - x - 6)(-3x^2 - x + 6) = 0$$

$$\therefore x = -1, \frac{6}{5}, 2$$

4) $|x^2 - 2x - 15| \leq x + 3$

$$(x+3)(x-5)$$

$$x^2 - 2x - 15 = x + 3 \text{ として}$$

$$x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$(x+3)(x-6) = 0$$

$$\therefore x = -3, 6$$

$$-x^2 - 2x - 15 = x + 3 \text{ として}$$

$$x^2 - x - 12 = 0$$

$$(x+3)(x-4) = 0$$

$$\therefore x = -3, 4$$

$$7 \sim 7 \text{ かつ}$$

$$x = -3, 4 \leq x \leq 6$$

5) $|x^2 - 2x - 9| \geq 2|x - 2|$

$$(x+1)(x-3)$$

$$(x^2 - 2x - 9)^2 \geq 4(x-2)^2$$

$$(x^2 - 2x - 9)^2 - 4(x-2)^2 \geq 0$$

$$\{x^2 - 2x - 9 + 2(x-2)\} \{x^2 - 2x - 9 - 2(x-2)\} \geq 0$$

$$\{x^2 - 4x - 13\} \{x^2 - 6x - 13\} \geq 0$$

$$(x^2 - 4x - 13) \geq 0$$

$$2 \pm \sqrt{29}$$

$$\therefore x \leq -\sqrt{7}, 2 - \sqrt{7} \leq x \leq \sqrt{7}$$

$$x \geq 2 + \sqrt{7}$$

<point>

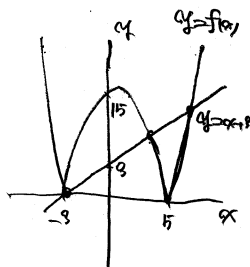
1. 絶対値のついた方程式は、必ず

(2x2)

$$A = B \Leftrightarrow A^2 = B^2 \text{ かつ}$$

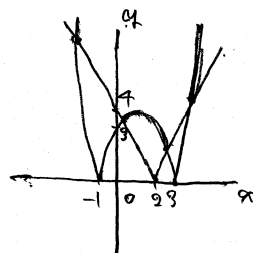
$$A, B \geq 0 \text{ かつ}$$

$$A = B \Leftrightarrow A^2 = B^2$$



$$f(x) = |x^2 - 2x - 15| \text{ とおき}$$

$$= \begin{cases} x^2 - 2x - 15 & (x \leq -3, x \geq 5) \\ -(x^2 - 2x - 15) & (-3 < x < 5) \end{cases}$$

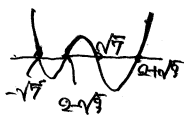


$$f(x) = |x^2 - 2x - 9| \text{ とおき}$$

$$= \begin{cases} x^2 - 2x - 9 & (x \leq -1, x \geq 3) \\ -(x^2 - 2x - 9) & (-1 < x < 3) \end{cases}$$

$$g(x) = 2|x - 2| \text{ とおき}$$

$$= \begin{cases} 2x - 4 & (x \geq 2) \\ -2x + 4 & (x < 2) \end{cases}$$



[11]

$$[x + \frac{1}{2}] - 3[x - \frac{1}{2}] - 7 = 0$$

$$[x + \frac{1}{2}] - 3([x + \frac{1}{2}] - 1) - 7 = 0 \Leftrightarrow [x - 1] = [x] - 1$$

$$[x + \frac{1}{2}] - 3[x + \frac{1}{2}] - 4 = 0$$

$$([x + \frac{1}{2}] + 1)([x + \frac{1}{2}] - 4) = 0$$

$$\therefore [x + \frac{1}{2}] = -1, 4$$

$$\therefore -1 \leq x + \frac{1}{2} < 0, 4 \leq x + \frac{1}{2} < 5$$

$$\therefore -\frac{3}{2} \leq x < -\frac{1}{2}, \frac{7}{2} \leq x < \frac{9}{2}$$

<point>

1. カウス記号を含む方程式は、必ず

[12]

4) $[2x] = 4$ かつ

$$4 \leq 2x < 5$$

$$\therefore 2 \leq x < \frac{5}{2}$$

5) $[2x - 1] = 4x$

$$4x \text{ は整数} \text{ かつ } x = \frac{k}{4} \text{ (k: 整数)} \text{ とおき}$$

このとき

$$[\frac{k}{2} - 1] = k$$

$$k \leq \frac{k}{2} - 1 < k + 1$$

$$k + 1 \leq \frac{k}{2} < k + 2$$

$$2k + 2 \leq k < 2k + 4$$

$$\therefore -4 < k \leq -2$$

$$k \text{ は整数} \text{ かつ } k = -3, -2$$

$$\therefore x = -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}$$

6) $[2x] - [x] = 4$

$$x = n + p \text{ (n: 整数)} \text{ とおき}$$

$$0 \leq p < \frac{1}{2} \text{ かつ}$$

$$[2x] = [2n + 2p] = 2n$$

$$[x] = n \text{ かつ}$$

$$2n - n = 4 \therefore n = 4$$

$$\text{7) } \frac{1}{2} \leq p < 1 \text{ かつ}$$

$$[2x] = 2n + 1$$

$$[x] = n \text{ かつ}$$

$$(2n + 1) - n = 4 \therefore n = 3$$

$$\text{8) } \text{9) かつ}$$

$$\frac{7}{2} \leq x < \frac{9}{2}$$

[13]

① $[\frac{x}{2}] = k \text{ 2/}$

$k \leq \frac{x}{2} < k+1$

$\therefore 2k \leq x < 2k+2$

② $[\frac{x}{2}] = [\frac{x}{3}] = 1 \text{ 2/}$

$\begin{cases} [\frac{x}{2}] = 1 \\ [\frac{x}{3}] = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 1 \leq \frac{x}{2} < 2 \\ 1 \leq \frac{x}{3} < 2 \end{cases}$

$\begin{cases} 2 \leq x < 4 \\ 3 \leq x < 6 \end{cases}$

$\begin{cases} 3 \leq x < 4 \\ 3 \leq x < 6 \end{cases} \therefore 3 \leq x < 4$

$\begin{cases} 2 \leq x < 4 \\ 3 \leq x < 6 \end{cases}$

$\begin{cases} 2 \leq x < 4 \\ 3 \leq x < 6 \end{cases}$

③ $[\frac{x}{2}] = [\frac{x}{3}] = k \text{ (} k = \frac{x}{6} \text{)} \text{ 2/}$

$\begin{cases} [\frac{x}{2}] = k \\ [\frac{x}{3}] = k \end{cases}$

$\begin{cases} k \leq \frac{x}{2} < k+1 \\ k \leq \frac{x}{3} < k+1 \end{cases}$

$\begin{cases} 2k \leq x < 2k+2 \\ 3k \leq x < 3k+3 \end{cases}$

$\begin{cases} 2k \leq x < 2k+2 \\ 3k \leq x < 3k+3 \end{cases}$

$\begin{cases} 2k \leq x < 2k+2 \\ 3k \leq x < 3k+3 \end{cases}$

$\begin{cases} 2k \leq x < 2k+2 \\ 3k \leq x < 3k+3 \end{cases}$

④ $k \geq 0 \text{ 2/}$

$k \leq \frac{x}{2} < k+1$

$k \leq \frac{x}{3} < k+1$

$k \leq \frac{x}{2} < k+1$

$k \leq \frac{x}{3} < k+1$

$k \leq \frac{x}{2} < k+1$

$k \leq \frac{x}{3} < k+1$

$k \leq \frac{x}{2} < k+1$

$k \leq \frac{x}{3} < k+1$

$k \leq \frac{x}{2} < k+1$

$k \leq \frac{x}{3} < k+1$

$k \leq \frac{x}{2} < k+1$

$k \leq \frac{x}{3} < k+1$

$k \leq \frac{x}{2} < k+1$

$k \leq \frac{x}{3} < k+1$

$k \leq \frac{x}{2} < k+1$

$k \leq \frac{x}{3} < k+1$

$k \leq \frac{x}{2} < k+1$

$k \leq \frac{x}{3} < k+1$

$k \leq \frac{x}{2} < k+1$

$k \leq \frac{x}{3} < k+1$



[14]

① $[\alpha]^2 - 2[\alpha] = 0$

$[\alpha]([\alpha] - 2) = 0$

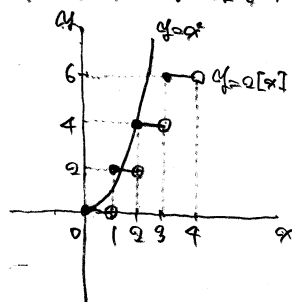
$\therefore [\alpha] = 0, 2$

$\therefore 0 \leq \alpha < 1, 2 \leq \alpha < 3$

② $\alpha^2 - 2[\alpha] = 0$

$\alpha^2 = 2[\alpha] \dots ①$

①の①より $y = \alpha^2$ と $y = 2[\alpha]$ の交点の α の値について、



$\alpha = 0, \sqrt{2}, 2$

$\alpha = 0, \sqrt{2}, 2$

$[\alpha] \leq \alpha < [\alpha] + 1$

$\alpha^2 = 2[\alpha]$

$\alpha - 1 < [\alpha] \leq \alpha$

$2(\alpha - 1) < 2[\alpha] \leq 2\alpha$

$2\alpha - 2 < \alpha^2 \leq 2\alpha$

$\begin{cases} \alpha^2 - 2\alpha + 2 > 0 \\ \alpha^2 - 2\alpha \leq 0 \end{cases}$

$\alpha^2 - 2\alpha + 2 > 0$

$\alpha^2 - 2\alpha \leq 0$

$\alpha^2 - 2\alpha + 2 > 0$

$\alpha^2 - 2\alpha \leq 0$

$\alpha^2 - 2\alpha + 2 > 0$

$\alpha^2 - 2\alpha \leq 0$

$\alpha^2 - 2\alpha + 2 > 0$

$\alpha^2 - 2\alpha \leq 0$

$\alpha^2 - 2\alpha + 2 > 0$

$\alpha^2 - 2\alpha \leq 0$

$\alpha^2 - 2\alpha + 2 > 0$

$\alpha^2 - 2\alpha \leq 0$

$\alpha^2 - 2\alpha + 2 > 0$

$\alpha^2 - 2\alpha \leq 0$

$\alpha^2 - 2\alpha + 2 > 0$

$\alpha^2 - 2\alpha \leq 0$

$\alpha^2 - 2\alpha + 2 > 0$

$\alpha^2 - 2\alpha \leq 0$

$\alpha^2 - 2\alpha + 2 > 0$

$\alpha^2 - 2\alpha \leq 0$

6

$$\begin{cases} x^2 - 2y = 8 \dots ① \\ y^2 - 2x = 8 \dots ② \end{cases}$$

① - ② $\pm$

$$x^2 - y^2 + 2(x - y) = 0$$

$$(x + y)(x - y) + 2(x - y) = 0$$

$$(x + y)(x + y + 2) = 0$$

$$\therefore y = x \text{ or } y = -x - 2$$

③

④

①, ③ $\pm$

$$x^2 - 2x = 8, y = x$$

$$x^2 - 2x - 8 = 0, y = x$$

$$(x + 2)(x - 4) = 0, y = x$$

$$\therefore (x, y) = (-2, -2), (4, 4)$$

①, ④ $\pm$

$$x^2 - 2(-x - 2) = 8, y = -x - 2$$

$$x^2 + 2x - 4 = 0, y = -x - 2$$

$$\therefore x = -1 \pm \sqrt{5}$$

$$\therefore (x, y) = (-1 \pm \sqrt{5}, -1 \mp \sqrt{5}) \text{ (後多1+1順)}$$