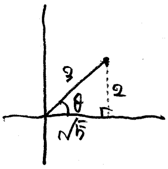
数学基本問題演習 9. 三角比(1)

[1]

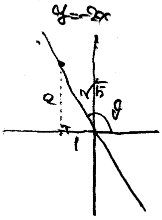
(1) $\sin\theta=\dfrac{2}{3}$, θは鋭角より

$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

$\tan\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$



(2) $\tan\theta=-2$, $0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より



$\cos\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin\theta=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

よって

$\cos\theta+3\sin\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}+3\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$

(3) $\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=\dfrac{3}{4}$

$\sin^2\theta+2\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta=\dfrac{3}{4}$

$1+2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{3}{4}$

$\therefore \sin\theta\cos\theta=-\dfrac{1}{8}$ …①

$(\sin\theta-\cos\theta)^2=1-2\sin\theta\cos\theta=\dfrac{5}{4}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ であるから $\sin\theta\geqq0$ かつ①より $\cos\theta<0$

よって $\sin\theta-\cos\theta>0$ より

$\sin\theta-\cos\theta=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

<point>

1. 三角比の定義
2. 三角比の相互関係

[2]

(1) $\sin\underset{180^\circ-20^\circ}{\underset{\shortparallel}{160^\circ}}\cos\underset{90^\circ-20^\circ}{\underset{\shortparallel}{70^\circ}}+\cos20^\circ\sin\underset{90^\circ-20^\circ}{\underset{\shortparallel}{70^\circ}}$

$=\sin20^\circ\sin20^\circ+\cos20^\circ\cos20^\circ$

$=\sin^2 20^\circ+\cos^2 20^\circ=1$

(別解)

与式 $=\sin20^\circ\cos70^\circ+\cos20^\circ\sin70^\circ$

$=\sin(20^\circ+70^\circ)$

$=\sin90^\circ=1$

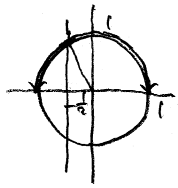
<point>

1. 補角 $(180^\circ-\theta)$, 余角 $(90^\circ-\theta)$ の公式

[3]

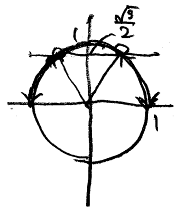
(1) $\cos\theta=-\dfrac{1}{2}$, $0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$

$\theta=120^\circ$



(2) $\sin\theta<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$

$0^\circ\leqq\theta<60^\circ$, $120^\circ<\theta\leqq180^\circ$



(3) $2\cos^2\theta+3\sin\theta-3=0$

$2(1-\sin^2\theta)+3\sin\theta-3=0$

$2\sin^2\theta-3\sin\theta+1=0$

$\begin{matrix}1 & \times & -1\\ 2 & & -1\end{matrix}$

$(\sin\theta-1)(2\sin\theta-1)=0$

$\therefore \sin\theta=1,\ \dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より

$\theta=30^\circ, 90^\circ, 150^\circ$

(4) $2\sin^2\theta+3\cos(180^\circ-\theta)>0$

$2(1-\cos^2\theta)-3\cos\theta>0$

$2\cos^2\theta+3\cos\theta-2<0$

$\begin{matrix}1 & \times & 2\\ 2 & & -1\end{matrix}$

$(\cos\theta+2)(2\cos\theta-1)<0$

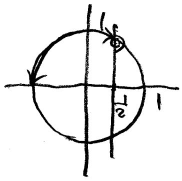
$\cos\theta+2>0$ より

$2\cos\theta-1<0$

$\cos\theta<\dfrac{1}{2}$

$0^\circ<\theta<180^\circ$ より

$60^\circ<\theta<180^\circ$

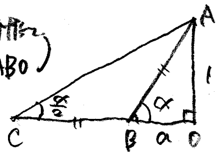


<point>

1. 三角比を含んだ方程式・不等式

[4]

$\angle OCA=\boxed{\dfrac{\alpha}{2}}^\circ$ (△ACBは二等辺三角形, $\angle BAC+\angle BCA=\angle ABO$)



$BC=\boxed{\sqrt{a^2+1}}$

$\tan\angle OCA=\dfrac{1}{a+\sqrt{a^2+1}}=\boxed{\sqrt{a^2+1}-a}$

$\tan15^\circ=\boxed{2-\sqrt{3}}$ $(a=\sqrt{3})$

$\tan22.5^\circ=\boxed{\sqrt{2}-1}$ $(a=1)$

<point>

1. 15°, 22.5°の三角比

5

図より

BD = ア $\boxed{1}$

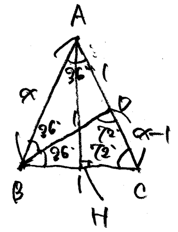
△ABC∽△BCDより

$x:1=1:x-1$

$x(x-1)=1$

$x^2-x+1=0$

$\therefore x=$ イ $\boxed{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$

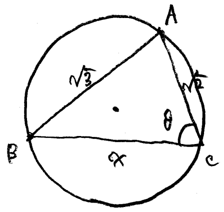


$\sin 18^\circ=\dfrac{BH}{AB}=\dfrac{1}{\sqrt{5}+1}=\boxed{\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}}$

<point>

1. 18°の三角比

6



正弦定理より

$\dfrac{\sqrt{3}}{\sin\theta}=2$

$\therefore \sin\theta=$ ア $\boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$ $\quad \therefore \theta=60^\circ$

BC$=x$とおくと余弦定理より

$3=x^2+2-2\sqrt{2}x\cos 60^\circ$

$x^2-\sqrt{2}x-1=0$

$\therefore x=$ イ $\boxed{\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}}$

△ABCの面積Sは

$S=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{2}\underbrace{\sin 60^\circ}_{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$=\dfrac{2\sqrt{3}+6}{8}=$ ウ $\boxed{\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}}$

[別解]

正弦定理より

$\dfrac{\sqrt{2}}{\sin\angle ABC}=2$

$\sin\angle ABC=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \therefore \angle ABC=45^\circ$

よって$\angle BAC=75^\circ$

正弦定理より

$\dfrac{BC}{\sin 75^\circ}=2$

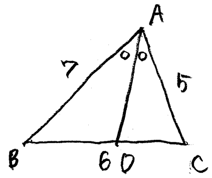
$BC=2\underbrace{\sin 75^\circ}_{45^\circ+30^\circ}$

$=2(\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ\sin 30^\circ)=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

<point> 1. 正弦定理 余弦定理

7

(1) 角の二等分線の定理より



$BD:DC=AB:AC$

$=7:5$

よって

$DC=6\cdot\dfrac{5}{12}=$ ア $\boxed{\dfrac{5}{2}}$

△ABCで余弦定理より

$7^2=5^2+6^2-2\cdot5\cdot6\cdot\cos C$

$\therefore \cos C=\dfrac{1}{5}$

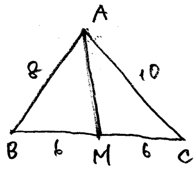
△ADCで余弦定理より

$AD^2=5^2+\left(\dfrac{5}{2}\right)^2-2\cdot5\cdot\dfrac{5}{\cancel{2}}\cdot\cos C$

$=\dfrac{105}{4}$

$\therefore AD=$ イ $\boxed{\dfrac{\sqrt{105}}{2}}$

(2) 余弦定理より



$12^2=8^2+10^2-2\cdot8\cdot10\cdot\cos A$

$160\cos A=20$

$\therefore \cos A=\boxed{\dfrac{1}{8}}$

余弦定理より

$10^2=8^2+12^2-2\cdot8\cdot12\cdot\cos B$

$192\cos B=108$

$\therefore \cos B=\dfrac{9}{16}$ $\qquad \sin B=\dfrac{5\sqrt{7}}{16}$

△ABMで余弦定理より

$AM^2=8^2+6^2-2\cdot8\cdot6\cdot\cos B$

$=46$

$\therefore AM=\boxed{\sqrt{46}}$

△ABMの面積Sは

$S=\dfrac{1}{2}\cdot6\cdot8\cdot\sin B$

$=\dfrac{1}{2}\cdot\overset{3}{\cancel{6}}\cdot8\cdot\dfrac{5\sqrt{7}}{\underset{2}{\cancel{16}}}=\boxed{\dfrac{15\sqrt{7}}{2}}$

$\boxed{8}$

(1) $c\cos B - b\cos C = 0$

余弦定理より

$b^2 = c^2+a^2-2ca\cos B \qquad \therefore \cos B = \frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}$

同様に

$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

より

$\cancel{c}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2\cancel{c}a} - \cancel{b}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2a\cancel{b}} = 0$

$\therefore b = c$

よって△ABCはCA=ABの二等辺三角形

(2) $a^2\sin B\cos A - b^2\sin A\cos B = 0$

正弦定理, 余弦定理より

$a^2\cdot\frac{\cancel{b}}{\cancel{2}R}\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{\cancel{2b}c} - b^2\cdot\frac{\cancel{a}}{2R}\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{\cancel{2}c\cancel{a}} = 0$

$a^2b^2+c^2a^2-a^4-b^2c^2-a^2b^2+b^4=0$

$c^2(a^2-b^2)-(a^4-b^4)=0$

$(a^2-b^2)(c^2-a^2-b^2)=0$

$\therefore a=b$ or $c^2=a^2+b^2$

よって△ABCは

BC=CAの二等辺三角形 または

∠C=90°の直角三角形

<point>

1. 三角形の形状問題

辺の長さまたは角の大きさのみの式に変形する.