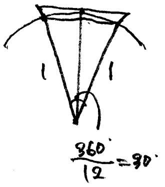
基本問題演習11. 三角比(3)

[1]

(1) 面積は



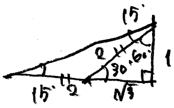
$$12\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\underset{}{\overset{\frac{1}{2}}{\sin30^\circ}}=3$$

1辺の長さℓは

余弦定理より

$$\ell^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos30^\circ$$
$$=2-\sqrt{3}$$
$$\therefore\ \ell=\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

(2) 面積は



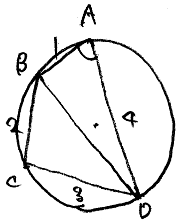
$$12\cdot\cancel{2}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}\cdot1\cdot\tan15^\circ=12\cdot\frac{1}{2+\sqrt{3}}$$
$$=12(2-\sqrt{3})$$

1辺の長さは

$$2\cdot\tan15^\circ=2(2-\sqrt{3})$$

[2]

(1) 四角形ABCDは円に内接するから $\angle C=180^\circ-A$



△ABDで余弦定理より

$$BD^2=1^2+4^2-2\cdot1\cdot4\cdot\cos A$$
$$=17-8\cos A\ \cdots①$$

△BCDで余弦定理より

$$BD^2=2^2+3^2-2\cdot2\cdot3\cdot\cos\overset{180^\circ-A}{\angle C}$$
$$=13+12\cos A\ \cdots②$$

①, ②より

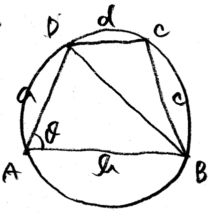
$$17-8\cos A=13+12\cos A$$
$$\therefore\ \cos A=\frac{1}{5}\qquad \therefore\ \sin A=\frac{2\sqrt{6}}{5}$$

(2) 四角形ABCDの面積Sは

$$S=\triangle ABD+\triangle BCD$$
$$=\frac{1}{\cancel{2}}\cdot1\cdot\overset{2}{\cancel{4}}\sin A+\frac{1}{\cancel{2}}\cdot2\cdot3\cdot\sin\overset{180^\circ-A}{\angle C}\ (=\sin A)$$
$$=5\sin A=2\sqrt{6}$$

[3]

(1) 四角形ABCDは円に内接するから



$$\angle BCD=180^\circ-\theta$$

△ABDで余弦定理より

$$BD^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta\ \cdots①$$

△BCDで余弦定理より

$$BD^2=c^2+d^2-2cd\cos(180^\circ-\theta)$$
$$=c^2+d^2+2cd\cos\theta\ \cdots②$$

①, ②より

$$a^2+b^2-2ab\cos\theta=c^2+d^2+2cd\cos\theta$$
$$\therefore\ a^2+b^2-c^2-d^2=2(ab+cd)\cos\theta$$ は

(2) (1)より

$$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)}$$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{4(ab+cd)^2}}$$
$$=\frac{1}{2(ab+cd)}\sqrt{4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}$$
$$=\frac{1}{2(ab+cd)}\sqrt{\{2(ab+cd)+(a^2+b^2-c^2-d^2)\}\{2(ab+cd)-(a^2+b^2-c^2-d^2)\}}$$
$$=\frac{1}{2(ab+cd)}\sqrt{\{(a+b)^2-(c-d)^2\}\{(c+d)^2-(a-b)^2\}}$$
$$=\frac{1}{2(ab+cd)}\sqrt{(a+b+c-d)(a+b-c+d)(c+d+a-b)(c+d-a+b)}$$

$a+b+c+d=2s$

$$=\frac{1}{2(ab+cd)}\sqrt{(2s-2a)(2s-2b)(2s-2c)(2s-2d)}$$
$$=\frac{2}{ab+cd}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

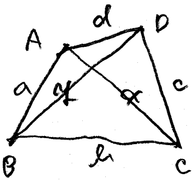
$$T=\triangle ABD+\triangle BCD$$
$$=\frac{1}{2}ab\sin\theta+\frac{1}{2}cd\overset{\sin\theta}{\sin(180^\circ-\theta)}$$
$$=\frac{1}{2}(ab+cd)\sin\theta$$
$$=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$ は

(ブラーマグプターの公式)

(ヘロンの公式の拡張)

[4]

(1) △ABDで余弦定理より



$$y^2 = d^2+a^2-2da\cos A$$

$$\therefore \cos A = \frac{d^2+a^2-y^2}{2da}$$

同様に

$$\cos B = \frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}$$

$$\cos C = \frac{b^2+c^2-y^2}{2bc}$$

$$\cos D = \frac{c^2+d^2-x^2}{2cd} \quad /\!/$$

(2) 四角形ABCDが円に内接するとき

$C=180°-A,\ D=180°-B$ より

$$\cos C = -\cos A$$

$$\frac{b^2+c^2-y^2}{2bc} = -\frac{d^2+a^2-y^2}{2da}$$

$$da(b^2+c^2-y^2) = bc(y^2-d^2-a^2)$$

$$(bc+da)y^2 = da(b^2+c^2)+bc(d^2+a^2)$$

$$\therefore y = \sqrt{\frac{\underbrace{da(b^2+c^2)+bc(d^2+a^2)}_{(ac+bd)(ab+cd)}}{bc+da}}$$

$$\cos D = -\cos B$$

$$\frac{c^2+d^2-x^2}{2cd} = -\frac{a^2+b^2-x^2}{2ab}$$

$$ab(c^2+d^2-x^2) = cd(x^2-a^2-b^2)$$

$$(ab+cd)x^2 = ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)$$

$$\therefore x = \sqrt{\frac{\underbrace{ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)}_{(ac+bd)(bc+da)}}{ab+cd}}$$

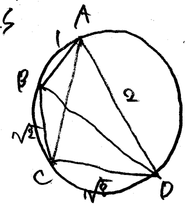
よって

$$xy = \sqrt{(ac+bd)^2}$$

$$= ac+bd \text{ は(トレミーの定理)}$$

[5]

(1) 四角形ABCDは円に内接するから



$$C = 180°-A$$

△ABDで余弦定理より

$$BD^2 = 1^2+2^2-2\cdot1\cdot2\cdot\cos A$$

$$= 5-4\cos A \cdots ①$$

△BCDで余弦定理より

$$BD^2 = 2+3-2\sqrt{2}\sqrt{3}\cdot\cos(180°-A)$$

$$= 5+2\sqrt{6}\cos A \cdots ②$$

①,②より

$$5-4\cos A = 5+2\sqrt{6}\cos A$$

$$\therefore \cos A = 0$$

よって

$$BD^2 = 5 \qquad \therefore BD = \sqrt{5} \quad /\!/$$

(2) トレミーの定理より

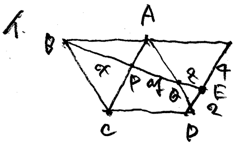
$$\sqrt{5}AC = 2\sqrt{2}+\sqrt{3}$$

$$\therefore AC = \frac{2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{10}+\sqrt{15}}{5} \quad /\!/$$

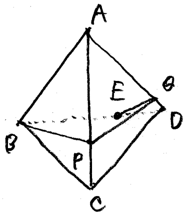
[6]

ア→省略

イ.



展開図



図のようにB, P, Q, Eが一直線上に並ぶとき

$x+y+z$ は最小

△BEB'で余弦定理より

$$BE^2 = 4^2+12^2-2\cdot4\cdot12\cdot\underbrace{\cos60°}_{\frac{1}{2}}$$

$$= 112$$

$$\therefore BE = 4\sqrt{7}$$

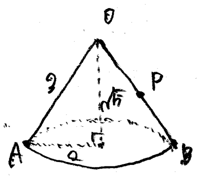
最小値は $4\sqrt{7}$ //

$\boxed{7}$

図のようにθとおくと

$3\theta = \pi \cdot 2^2$

$\therefore \theta = \frac{4}{3}\pi$



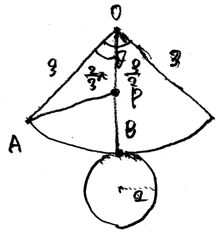
図のようにAPが直線になるとき

APは最小で、このとき

$AP^2 = 3^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{2} \cdot \underbrace{\cos\frac{2}{3}\pi}_{= -\frac{1}{2}}$

$= \frac{63}{4}$

$\therefore AP = \frac{3\sqrt{7}}{2}$



展開図

最小値は$\frac{3\sqrt{7}}{2}$