基本問題演習 3. 式と証明

[1]

(1) $(k+2)x+(k+1)y-3k-4=0$

$(x+y-3)k+(2x+y-4)=0$

これが任意のkについて成り立つとき

$\begin{cases} x+y-3=0 \\ 2x+y-4=0 \end{cases}$ $\therefore x=1,\ y=2$

(2) 与式が恒等式となるとき

$x=0,2,3$で成り立つから

$x=0$のとき $-6a+2b-c=-1$ …①

$x=2$ 〃 $c=7$ …②

$x=3$ 〃 $2b+2c=26$ …③

①〜③より

$a=1,\ b=6,\ c=7$

このとき右辺$=x^2-1$となり

与式は恒等式となる。

(3) $t=x-2$とおくと $x=t+2$

$(t+2)^3+1=t^3+at^2+bt+c$

$t^3+6t^2+12t+9=t^3+at^2+bt+c$

がtについての恒等式となればよいから

$a=6,\ b=12,\ c=9$

<point>

1. 恒等式の係数決定問題の解き方
   1. 係数比較
   2. 数値代入
   3. 置き換え

[2]

(1) $f(-3)=0$ より

$9a-3b=36$ $\therefore 3a-b=12$ …①

$f(2)=-5$ より

$4a+2b=-4$ $\therefore 2a+b=-2$ …②

①, ②より

$a=2,\ b=-6$

(2) $P(x)=(x-1)^2(x+a)+2x+3$ とおける

$P(2)=4$ より

$2+a+7=4$ $\therefore a=-5$

よって x^2-2x+1

$P(x)=(x-1)^2(x-5)+2x+3$

$=x^3-7x^2+13x-2$

(3) $f(x)=(x^2+x+1)(ax+b)+x+1$ とおける

$=ax^3+(a+b)x^2+(a+b+1)x+b+1$ …①

また

$f(x)=(x^2+1)(ax+c)+x-1$

$=ax^3+cx^2+(a+1)x+c-1$ …②

①=②として、これがxについての恒等式より

$\begin{cases} a+b=c \\ a+b+1=a+1 \\ b+1=c-1 \end{cases}$

$\therefore a=2,\ b=0,\ c=2$

よって

$f(x)=2x^3+2x^2+3x+1$

<point>

1. 割り算の原理
2. 剰余の定理

[3]

(1) $P(x)$をx^2+x-6で割った商を$Q_1(x)$とすると

$P(x)=(x^2+x-6)Q_1(x)+4x+5$

$=(x+3)(x-2)Q_1(x)+4x+5$ …①

$P(x)$をx^2-x-2で割った商を$Q_2(x)$とすると

$P(x)=(x^2-x-2)Q_2(x)+ax+1$

$=(x+1)(x-2)Q_2(x)+ax+1$ …②

①から $P(2)=13$ であるから②より

$2a+1=13$ $\therefore a=6$

(2) $P(x)$をx^3+2x^2-5x-6で割った商を$Q(x)$

余りをax^2+bx+cとすると

$P(x)=(x^3+2x^2-5x-6)Q(x)+px^2+qx+r$

$=(x+3)(x+1)(x-2)Q(x)+px^2+qx+r$

$P(-3)=-7,\ P(-1)=-5,\ P(2)=13$ より

$$\begin{cases} 9p-3q+r=-7 & \cdots ③ \\ p-q+r=-5 & \cdots ④ \\ 4p+2q+r=13 & \cdots ⑤ \end{cases}$$

③〜⑤より

$p=1,\ q=5,\ r=-1$

よって

x^2+5x-1

[別解]

$P(x)=(x^3+2x^2-5x-6)Q(x)+p(x^2+x-6)+4x+5$

とおける.

$P(-1)=-5$ より

$-6p+1=-5 \quad \therefore p=1$

よって余りは

x^2+5x-1

$\boxed{4}$

I. (1) $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割った商を $Q_1(x)$ とすると

$P(x)=(x-1)^2Q_1(x)+4x-5$

$P(x)$ を $x-1$ で割った余りは

$P(1)=-1$

(2) $P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割った商を $Q_2(x)$,

余りを $ax+b$ とすると

$P(x)=(x-1)(x+2)Q_2(x)+ax+b$

$P(1)=-1,\ P(-2)=-4$ より

$$\begin{cases} a+b=-1 \\ -2a+b=-4 \end{cases} \quad \therefore a=1,\ b=-2$$

よって余りは

$x-2$

(3) $P(x)$ を $(x-1)^2(x+2)$ で割った商を $Q_3(x)$,

余りを px^2+qx+r とおくと

$P(x)=(x-1)^2(x+2)Q_3(x)+px^2+qx+r$

$=(x-1)^2(x+2)Q_3(x)+p(x-1)^2+4x-5$

$P(-2)=-4$ より

$9p-13=-4 \quad \therefore p=1$

よって余りは

$(x-1)^2+4x-5=x^2+2x-4$

II. $f(x)$ を x^3-1 で割った商を $Q(x)$

余りを ax^2+bx+c とおくと

$f(x)=(x^3-1)Q(x)+ax^2+bx+c$

$=(x-1)(x^2+x+1)+a(x^2+x+1)+4x+5$

$f(1)=3$ より

$3a+9=3 \quad \therefore a=-2$

よって余りは

$-2(x^2+x+1)+4x+5=-2x^2+2x+3$

$\boxed{5}$

(1) $i^{2009}=i\cdot(i^2)^{1004}=i$

x^{2009} を x^2+1 で割った商を $Q(x)$

余りを $ax+b$ とすると

$x^{2009}=(x^2+1)Q(x)+ax+b$

$x=i$ を代入して

$i^{2009}=ai+b$

$i=ai+b$

$\therefore a=1,\ b=0$

よって余りは

x

(2) $P(x)=(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1$ とおく

$P(x)$ を x^2+x+1 で割った商を $Q(x)$

余りを $ax+b$ とおくと

$P(x)=(x^2+x+1)Q(x)+ax+b$

ここで

$P(\omega)=(\omega^{100}+1)^{100}+(\omega^2+1)^{100}+1$ $\quad \omega^2+\omega+1=0$

$=(\omega+1)^{100}+(\omega^2+1)^{100}+1$

$=(-\omega^2)^{100}+(-\omega)^{100}+1$

$=\omega^{200}+\omega^{100}+1$

$=\omega^2+\omega+1=0$

$P(\omega)=0$ より

$a\omega+b=0 \quad \therefore a=0,\ b=0$

よって $P(x)$ は x^2+x+1 で割り切れる.

<point>

1. $x^3=1$の虚数解 ω
   1. $\omega^2+\omega+1=0$
   2. $\omega^3=0$
   3. $x^3=1$の解は $1, \omega, \omega^2$である
      すなわち $\overline{\omega}=\omega^2$, $\overline{\omega^2}=\omega$
   4. $a\omega+b=0 \Leftrightarrow a=b=0$

$\boxed{6}$.

(1) $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$

$\Leftrightarrow$ $a=b$ かつ $b=c$ かつ $c=a$

$\Leftrightarrow$ $a=b=c$ は.

(2) $a+b=c+d$ より

$d=a+b-c \cdots ①$

$a^2+b^2=c^2+d^2$ より

$\cancel{a^2}+\cancel{b^2}=c^2+(a+b-c)^2$

$=c^2+\cancel{a^2}+\cancel{b^2}+c^2+2ab-2bc-2ca$

$a(b-c)-c(b-c)=0$

$(b-c)(a-c)=0$

$\therefore a=c$ または $b=c$

(i) $a=c$のとき

①より $b=d$

(ii) $b=c$のとき

①より $a=d$

よって題意は示された は

<point>

1. 等式の証明

$\boxed{7}$

(1) $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca \geqq 0$ を示せばよい

左辺$=\frac{1}{2}\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} \geqq 0$

等号成立は $a=b$, $b=c$, $c=a$

すなわち $a=b=c$のとき

(2) $a^4+b^4+c^4=(a^2)^2+(b^2)^2+(c^2)^2$

$\geqq a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$ ((1)より)

$=(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2$

$\geqq (ab)(bc)+(bc)(ca)+(ca)(ab)$ ((1)より)

$=abc(a+b+c)$

等号成立は

$$\begin{cases} a^2=b^2=c^2 \cdots ① \\ ab=bc=ca \cdots ② \end{cases}$$

(i) $a=0$ or $b=0$ or $c=0$のとき

①より $a=b=c=0$

(ii) $a, b, c \neq 0$のとき

②より

$a=c$, $b=a$, $b=c$

$\therefore a=b=c$

(i), (ii)より

$a=b=c$ は

<point>

1. 不等式の証明

$\boxed{8}$

(1) $x+\frac{16}{x} \geqq 2\sqrt{x \cdot \frac{16}{x}}=8$ (相加相乗平均)

等号成立は $x=\frac{16}{x}$ $\therefore x=4$のとき

このとき最小値をとり 最小値は $\boxed{8}$

$x+\frac{16}{x+2}=x+2+\frac{16}{x+2}-2$

$\geqq 2\sqrt{(x+2)\cdot\frac{16}{x+2}}-2=6$

等号成立は $x+2=\frac{16}{x+2}$ $\therefore x=2$のとき

このとき最小値をとり, 最小値は $\boxed{6}$

(2) $\frac{x}{x^2+16}=\frac{1}{x+\frac{16}{x}} \leqq \frac{1}{8}$

最大値は $\boxed{\frac{1}{8}}$ ($x=\boxed{4}$)

$\frac{x+2}{x^2+2x+16}=\frac{1}{\frac{x^2+2x+16}{x+2}}=\frac{1}{x+\frac{16}{x+2}} \leqq \frac{1}{6}$

最大値は $\boxed{\frac{1}{6}}$ ($x=\boxed{2}$)

<point>

1. 相加相乗平均.