

高2数学 基本問題演習 演習 40. 空間ベクトル(3)

1 [(1) 2019 福岡大 (2) 1996 関西学院大]

(1) 空間の2点 $A(1, -1, 2)$, $B(2, 1, 3)$ を通る直線を ℓ とする。 ℓ と zx 平面の交点の座標は ア である。また, ℓ 上の点で原点 O との距離が最小である点の座標は

イ である。

(2) 座標空間において, 2点 $A(1, 0, 2)$ および $B(-1, 1, 2)$ を通る直線を l とするとき,

点 $C(\text{ア}$, $-1, \text{イ}$) は l 上にある。更に, l が2点 $D(1, 2, 3)$ および

$E(5, 2, \text{ウ}$) を通る直線と点 F で交わるとき, 点 F の x 座標の値は エ である。

2

(1) 3点 $A(3, 3, 1)$, $B(-3, 1, 4)$, $C(0, 3, 2)$ を通る平面と y 軸との交点を求めよ。

(2) 直線 $l: (x, y, z) = (1, -1, 0) + t(2, 3, 4)$ (t はパラメーター) を含む平面のうち, 点 $A(1, 0, 2)$ を通るものと x 軸との交点を求めよ。

3 [2022 慶応義塾大]

点 O を原点とする xyz 座標空間に, 2点 $A(2, 3, 1)$, $B(-2, 1, 3)$ をとる。また, x 座標が正の点 C を, $\overrightarrow{OC}$ が $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ に垂直で, $|\overrightarrow{OC}| = 8\sqrt{3}$ となるように定める。

(1) $\triangle OAB$ の面積は ア $\sqrt{\text{イ}$ } である。

(2) 点 C の座標は $(\text{ウ}$, エ , オ) である。

(3) 四面体 $OABC$ の体積は カ である。

(4) 平面 ABC の方程式は $x + \text{キ}$ $y + \text{ク}$ $z - \text{ケ}$ $= 0$ である。

(5) 原点 O から平面 ABC に垂線 OH を下ろしたとき, 点 H の座標は

$\left(\frac{\text{コ}$ }{\text{サ} , $\frac{\text{シ}$ }{\text{ス} , $\frac{\text{セ}$ }{\text{ソ} } \right) である。

高2数学 基本問題演習 演習 40. 空間ベクトル(3)

4 [(1) 2021 成蹊大 (2) 2018 信州大 (3) 1996 立命館大]

(1) $\vec{a}=(1, -1, 1)$, $\vec{b}=(1, 0, 1)$, $\vec{c}=(2, 1, 0)$ とする。このとき, $|\vec{a}+x\vec{b}+y\vec{c}|$ は実数の組 $(x, y)=^{\text{ア}}\boxed{}$ に対して, 最小値 $^{\text{イ}}\boxed{}$ をとる。

(2) 座標空間に 4 点 A (1, 1, 2), B (2, 0, 1), C (1, 1, 0), D (3, 4, 6) がある。3 点 A, B, C の定める平面に関して点 D と対称な点を E とする。点 E の座標を求めよ。

(3) 空間において, 3 点 A (0, 0, 2), B (1, 0, 1), C (0, 1, 3) を通る平面 π がある。

$\triangle ABC$ の面積は $^{\text{ウ}}\boxed{}$ である。 a を定数とし, 点 P ($a, a+4, 0$) から平面 π に

垂線 l を下ろすと, l と π の交点 H の座標は $^{\text{エ}}\boxed{}$ であり, H が $\triangle ABC$ の内部に

あるための a の条件は $^{\text{ウ}}\boxed{} < a < ^{\text{エ}}\boxed{}$ である。

5 [2006 同志社大]

O を原点とする座標空間に 4 点 A (4, 0, 0), B (0, 8, 0), C (0, 0, 4), D (0, 0, 2) がある。

(1) $\triangle ABC$ の重心 G の座標を求めよ。

(2) 直線 OG と平面 ABD との交点 P の座標を求めよ。

(3) $\cos \angle OPD$ を求めよ。

(4) $\triangle OPD$ の面積を求めよ。

6 [1998 広島修道大]

3 点 O (0, 0, 0), A (1, 0, 0), B ($\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0$) について

(1) 四面体 OABC が正四面体となるような点 C の座標を求めよ。

(2) (1) の四面体 OABC に対して, $|\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CD}| = 3$ を満たす点 D はどのような図形を描くか。

高2数学 基本問題演習 演習 40. 空間ベクトル(3)

7 [2013 岩手大]

座標空間内に2点 $A(0, 3, 0)$, $B(0, -3, 0)$ を直径の両端とする球面 S を考える。 S 上に点 $P(x, y, z)$ をとり、 S 外に点 $Q(3, 4, 5)$ をとる。

- (1) 球面 S の方程式を求めよ。
- (2) ベクトル $\overrightarrow{AP}$ とベクトル $\overrightarrow{BP}$ の内積は、点 P が球面 S 上のどこにあっても必ず0になることを証明せよ。
- (3) 原点を O で表すとき、ベクトル $\overrightarrow{OQ}$ の大きさとベクトル $\overrightarrow{OP}$ の大きさを求めよ。
- (4) 点 $P(x, y, z)$ が球面 S 上を動くとき、 $3x+4y+5z$ の最大値を求めよ。また、そのときの P の座標を求めよ。

8 [2000 上智大]

座標空間において、原点 O を通り、ベクトル $\vec{u}=(1, 4, 1)$ に平行な直線を l 、点 $A(0, 2, 1)$ を中心とする半径1の球面を S とする。直線 l と球面 S の交点のうち原点 O に近いものを P とおく。

- (1) 点 P の座標を求めよ。
- (2) ベクトル $\overrightarrow{PO}$ とベクトル $\overrightarrow{AP}$ の内積を求めよ。
- (3) 線分 PO と線分 AP を含む平面上で、線分 AP を含む直線に関して、点 O と対称な点を R とする。このとき、ベクトル $\overrightarrow{PR}$ を求めよ。
- (4) 線分 PR を含む直線が xy 平面と交わる点の座標を求めよ。

9 [2024 東京農工大]

O を原点とする xyz 空間に点 $A(1, 0, 0)$ と、 O を中心とする半径1の球面 S がある。また、2点 $(2, 3, 4)$, $(-3, -2, -6)$ を通る直線を ℓ とする。直線 ℓ は S と2点で交わる。この2つの交点のうち、 x 座標が大きい方を点 B とし、小さい方を点 C とする。3点 A, B, C の定める平面を α とする。

- (1) 点 B と点 C の座標を、それぞれ求めよ。
- (2) $\triangle ABC$ において、 $\angle B$ の大きさを求めよ。
- (3) 平面 α において、3点 A, B, C を通る円を K とする。円 K の中心を P とし、半径を r とする。
 - (i) 点 P の座標と r の値を求めよ。
 - (ii) 点 P を通り α に垂直な直線を m とすると、 m と S は2点で交わる。この2つの交点のうち、 z 座標が大きい方を点 Q とするとき、四面体 $ABCQ$ の体積を求めよ。

高2数学 基本問題演習 演習 40. 空間ベクトル(3)

10 [(1) 2024 横浜市立大 (2) 2021 明治薬科大 (3) 2018 星薬科大]

(1) 球 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z = 35$ と平面 $x + 2y + 3z = 2$ の共通部分である円の面積を求めよ。

(2) 座標空間において 2 点 $(2, 5, 13)$, $(2, -7, -3)$ を直径の両端とするような球面 S の中心は ア で、半径は イ である。3 点 $(3, 7, 9)$, $(4, 9, 7)$, $(4, 3, 10)$ を含む平面と球面 S が交わってできる円の中心は ウ で、半径は エ である。

(3) a を正の実数として、点 $\left(\frac{a}{3}, 3, a-3\right)$ を通り、ベクトル $(3, -1, -3)$ に垂直な平面を α とするとき、原点を中心とする、半径 a の球面が平面 α と共有点をもつための必要十分条件は $a \geq \frac{-\text{ア} \text{ } + \text{イ} \text{ }}{\text{エ} \text{ }} \sqrt{\text{ウ} \text{ }}$ である。

11 [1998 東北学院大]

1 辺の長さが 12 の正四面体を $OABC$ とする。

このとき、 $\overrightarrow{OP} = r\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}$, $r + 2s + 2t = 1$ を満たす点 P 全体は平面になる。

その平面を π とする。

(1) 平面 π と正四面体 $OABC$ の辺との交点をすべて求め、その交点の位置ベクトル (頂点 O を基準とする位置ベクトル) を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ を用いて表せ。

(2) 平面 π で切られる正四面体の切り口の面積を求めよ。