

# 基本問題演習 38. 空間ベクトル

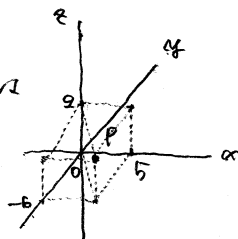
1

I. Pとα平面に降した射影は点Q

$$P(5, 6, -2)$$

α平面は

$$x - 5 - 6 = 2$$



(2, -1, 5)に降した射影は点Q(a, b, c)とすると

$$\begin{cases} \frac{a+5}{2} = 2 \\ \frac{b-6}{2} = -1 \\ \frac{c+2}{2} = 5 \end{cases}$$

$$\therefore a = -1, b = 4, c = 8$$

$$\therefore (-1, 4, 8)$$

II. d)

$$G\left(\frac{0+2+0}{3}, \frac{1+3+3}{3}, \frac{-2-2+0}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

① Dはα平面上の点より

$$D(a, b, 0) \text{ とする}$$

$$AD^2 = BD^2 = OD^2 \text{ より}$$

$$a^2 + (b-1)^2 + 4 = (a-2)^2 + (b-3)^2 + 4 = a^2 + (b-3)^2$$

$$\begin{cases} -2b + 1 = -4a - 6b + 13 & a + b = 3 \dots ① \\ -4a + 8 = 0 & \dots ② \\ -2b + 5 = -6b + 9 & \dots ③ \end{cases}$$

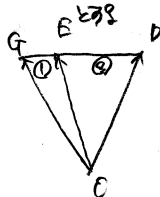
$$\text{②, ③より } a = 2, b = 1$$

①より ①は3点を通る

② 求める点Eとすると

$$\begin{aligned} \vec{OE} &= \frac{3}{4}\vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{OB} \\ &= \frac{3}{4}\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{4}{3}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}, \frac{7}{3}, -\frac{4}{3}\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\therefore E(1, 2, -1)$$



<point>

1. 空間座標

2. 内分点, 重心の座標

3. 空間内の2点間の距離

2

I. 球面の中心は

$$\left(\frac{1-5}{2}, \frac{2+8}{2}, \frac{4-2}{2}\right) = (-2, 5, 1)$$

半径は

$$\sqrt{(1+2)^2 + (2-5)^2 + (4-1)^2} = 3\sqrt{3}$$

よって球の方程式は

$$(x+2)^2 + (y-5)^2 + (z-1)^2 = 27$$

球の体積は

$$\frac{4}{3}\pi(3\sqrt{3})^3 = 108\sqrt{3}\pi$$

(9接する立方体の1辺の長さをxとすると

対角線の長さ=球の直径より

$$\sqrt{3}x = 6\sqrt{3} \therefore x = 6$$

よって(9接する立方体の体積は

$$6^3 = 216$$

外接する立方体の1辺の長さをxとすると

球の体積は

$$(6\sqrt{3})^3 = 648\sqrt{3}$$

II. P(α, 4, 2)とすると

$$AP = BP \text{ より}$$

$$AP^2 = BP^2$$

$$(α-1)^2 + (4-3)^2 + (2+2)^2 = (α+2)^2 + (4-9)^2 + (2-1)^2$$

$$9α^2 - 2α + 13 = 4α^2 + 18α + 2$$

$$5α^2 - 17α + 11 = 0$$

$$(α-3)^2 + (4-5)^2 + (2-2)^2 = 24$$

中心は(-3, 5, 2). 半径は2√6の球面

[別解]

$$AP = BP \text{ より}$$

$$AP : BP = 2 : 1$$

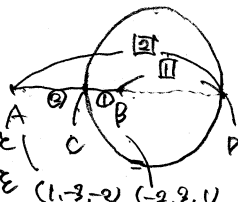
PはAP:BP=2:1に内分する点Cと  
外 D(-3, -2) (-2, 5, 1)

直径の両端を通る球面は2点C, D

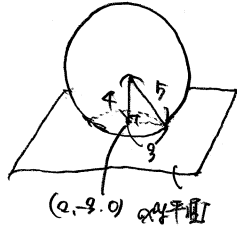
$$C(-1, 1, 0), D(-5, 9, 4)$$

中心は(-3, 5, 2). 半径は√(2^2 + 4^2 + 2^2) = 2√6

$$(α+3)^2 + (4-5)^2 + (2-2)^2 = 24$$



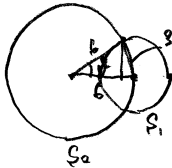
III.  $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0, z = 0$   
 $(x-2)^2 + (y+3)^2 = 9, z = 0$   
 中心  $(2, -3, 0)$ . 半径 3 の円  
 図 8/1 球の中心は  
 $(2, -3, 4)$ .



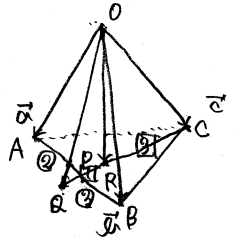
IV. d)  $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 8y + 8z + 27 = 0$   
 $(x-2)^2 + (y-4)^2 + (z+4)^2 = 9$   
 中心  $(2, 4, -4)$ . 半径 3.  
 e)  $S_1$  は  $(2, 4, -4)$  を通るから  
 $4 + 16 + 16 = R^2$   
 $R \geq 0$  より  $R = 6$

g) 図のように  $\theta$  とおくと  
 余弦定理より

$9 = 6^2 + 6^2 - 2 \cdot 6 \cdot 6 \cdot \cos \theta$   
 $\therefore \cos \theta = -\frac{7}{8}$   
 $\sin \theta = \frac{\sqrt{15}}{8}$   
 交わりの円の半径  $r$  は  
 $r = 6 \sin \theta = \frac{3\sqrt{15}}{4}$



II.  $\vec{OR} = \frac{2}{4}\vec{OA} + \frac{1}{4}\vec{OC}$   
 $= \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \vec{OP} + \frac{1}{4} \vec{C}$   
 $= \frac{5}{6} \left( \frac{2}{5} \vec{a} + \frac{2}{5} \vec{b} \right) + \frac{1}{4} \vec{c}$   
 $= \frac{1}{2} \vec{a} + \frac{1}{3} \vec{b} + \frac{1}{4} \vec{c}$



<point>

1.  $\triangle PQR$  の外接球
2. 点  $R$  の軌跡.

[4]

I. A, B, C が一直線上にあるとき

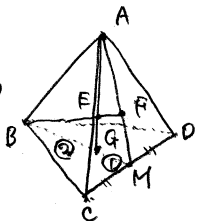
$\vec{AC} = k \vec{AB}$  ( $k$ : 定数)

$\begin{pmatrix} m-2 \\ m-3 \\ 1 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ -5 \end{pmatrix}$

$\begin{cases} m-2 = k \\ m-3 = -5k \\ 1 = -5k \end{cases}$

$\therefore k = -\frac{1}{5}, m = \frac{2}{5}, n = 4$

II. d)  $\vec{AQ} = \frac{1}{3} \vec{AB} + \frac{2}{3} \vec{AM}$   
 $= \frac{1}{3} \vec{AB} + \frac{2}{3} \left( \frac{1}{2} \vec{AC} + \frac{1}{2} \vec{AD} \right)$   
 $= \frac{1}{3} \vec{AB} + \frac{1}{3} \vec{AC} + \frac{1}{3} \vec{AD}$



e)  $\vec{BE} = \vec{AE} - \vec{AB}$   
 $= \frac{2}{4} \vec{AQ} - \vec{AB}$   
 $= -\frac{2}{4} \vec{AB} + \frac{1}{4} \vec{AC} + \frac{1}{4} \vec{AD}$

$\vec{BF} = \vec{AF} - \vec{AB}$   
 $= -\vec{AB} + \frac{1}{3} \vec{AC} + \frac{1}{3} \vec{AD}$   
 $= \frac{4}{9} \left( -\frac{3}{4} \vec{AB} + \frac{1}{4} \vec{AC} + \frac{1}{4} \vec{AD} \right)$   
 $= \frac{4}{9} \vec{BE}$

よって点 B, E, F は一直線上にあり  
 $E$  は  $BF$  を  $3:1$  に内分する。

<point>

1. 交線条件. 平行条件

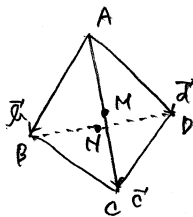
2. 3点 E, F が一直線上にある

<point>

1. 球面の方程式.

[3]

I. d)  $\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM}$   
 $= \frac{1}{2} \vec{b} + \frac{1}{2} \vec{d} - \frac{1}{2} \vec{c}$   
 $= \frac{1}{2} \vec{b} - \frac{1}{2} \vec{c} + \frac{1}{2} \vec{d}$



e)  $\vec{AP} + \vec{AQ} + \vec{CR} + \vec{DR}$   
 $= \vec{b} + \vec{d} + (\vec{b} - \vec{c}) + (\vec{d} - \vec{c})$   
 $= 2\vec{b} - 2\vec{c} + 2\vec{d}$   
 $= 4\vec{MN}$

[5]

I. A, B, C, D 4点同一平面上にあるとき

$$\vec{AB} = k\vec{AC} + l\vec{AD} \quad (k, l: \text{実数})$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2-3 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -2 = k + 2l \\ 0 = -k \\ 2-3 = -3k - 2l \end{cases}$$

$$\therefore k=0, l=-1, 2=5$$

II.  $\vec{AB} = \vec{u}, \vec{AC} = \vec{v}, \vec{AD} = \vec{w}$  とする

$$\vec{OE} = \vec{AE} - \vec{AO}$$

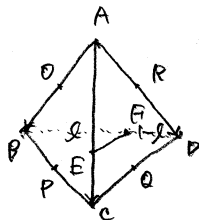
$$= -\frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} + \frac{1}{2}\vec{w}$$

$$\vec{OF} = \vec{AF} - \vec{AO}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} - \frac{1}{2}\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{v}$$

$$\vec{OR} = \vec{AR} - \vec{AO}$$

$$= \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{u}$$



IV

$$\vec{OE} = \vec{OF} + \vec{FR} \quad (4点 O, P, Q, R \text{ は同一平面上にある})$$

$$\vec{AE} = k\vec{AC}, \vec{BF} = l\vec{BD} \quad (0 \leq k, l \leq 1) \text{ とする}$$

EF の中点を M とする

$$\vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{BF} - \vec{AO}$$

$$= \frac{1}{2}k\vec{c} + \frac{1}{2}l\vec{d} + \frac{1}{2}(1-l)\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$$

$$= \frac{1}{2}k\vec{c} + \frac{1}{2}l(\vec{d} - \vec{b})$$

$$= k\vec{OP} + l\vec{OR}$$

I, 2 M は 4点 O, P, Q, R が含む平面上にある

<point>

1. 共面条件

点 P が平面 ABC 上にある (数値 4点 A, B, C, P が同一平面上にある)

[6]

$$\vec{d} = k\vec{a} + l\vec{b} + m\vec{c} \quad (*)$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + m \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3 = -3k + l - m \\ -2 = l \\ 4 = 2k - l \end{cases}$$

$$\therefore k=9, l=1, m=-16$$

$$\vec{OA} = \vec{a}, \vec{OB} = \vec{b}, \vec{OC} = \vec{c} \text{ とし}$$

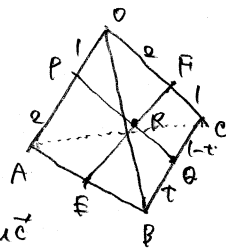
③  $PQ \in EF$  のとき  $s, t \in \mathbb{R}$  とする

$$\vec{PR} = \vec{RQ} = \vec{u}: 1-u \text{ とする}$$

$$\vec{OR} = (1-u)\vec{OP} + u\vec{OQ}$$

$$= (1-u)\left(\frac{1}{2}\vec{a} + u\vec{b}\right) + u\left((1-t)\vec{b} + t\vec{c}\right)$$

$$= \frac{1}{2}(1-u)\vec{a} + u(1-t)\vec{b} + tu\vec{c}$$



$$\vec{ER} = \vec{RF} = \vec{v}: 1-v \text{ とする}$$

$$\vec{OR} = (1-v)\vec{OE} + v\vec{OF}$$

$$= (1-v)\left(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}\right) + \frac{2}{3}v\vec{c}$$

$$= \frac{1}{2}(1-v)\vec{a} + \frac{1}{2}(1-v)\vec{b} + \frac{2}{3}v\vec{c}$$

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ は 1次独立}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{2}(1-u) = \frac{1}{2}(1-v) \dots ① \\ u(1-t) = \frac{1}{2}(1-v) \dots ② \\ tu = \frac{2}{3}v \dots ③ \end{cases}$$

②, ③より

$$u - \frac{2}{3}v = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}v \quad \therefore 6u - v = 3 \dots ④$$

①, ②より

$$2u - 3v = -1 \dots ⑤$$

④, ⑤より

$$u = \frac{5}{8}, v = \frac{3}{4} \quad \therefore t = \frac{4}{5}$$

<point>

1. 1次独立の性質 (分解の一意性)

2. 1次独立

[7]

I.  $P$  が平面 ABC 上にあるとき

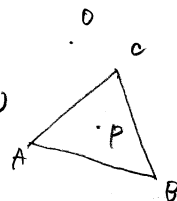
$$\vec{OP} = \alpha\vec{OA} + \beta\vec{OB} + \gamma\vec{OC} \quad (\alpha, \beta, \gamma: \text{実数})$$

$$= \vec{a} + \alpha(\vec{b} - \vec{a}) + \beta(\vec{c} - \vec{a})$$

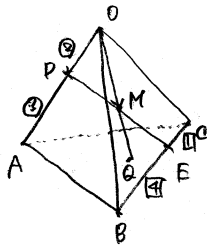
$$= (1-\alpha-\beta)\vec{a} + \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$$

$$s = 1-\alpha-\beta, t = \alpha, u = \beta \text{ とおくと}$$

$$\vec{OP} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}, s+t+u=1 \quad \square$$



$$\begin{aligned} \text{a) } \vec{OM} &= \frac{1}{2}\vec{OB} + \frac{1}{2}\vec{OE} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}\vec{a} + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{5}\vec{b} + \frac{4}{5}\vec{c} \right) \\ &= \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{1}{10}\vec{b} + \frac{2}{5}\vec{c} \end{aligned}$$



b) O, M, Q は一直線上にあるから

$$\begin{aligned} \vec{OQ} &= k\vec{OM} \quad (k: \text{定数}) \\ &= \frac{1}{5}k\vec{a} + \frac{1}{10}k\vec{b} + \frac{2}{5}k\vec{c} \end{aligned}$$

Q は平面 ABC 上にあるから

$$\frac{1}{5}k + \frac{1}{10}k + \frac{2}{5}k = 1 \quad \therefore k = \frac{10}{7}$$

よって

$$\vec{OQ} = \frac{2}{7}\vec{a} + \frac{1}{7}\vec{b} + \frac{4}{7}\vec{c}$$

$$\text{c) } OM:MQ = 7:3$$

$$\text{II, d) } \vec{OM} = \vec{a} + \vec{b} + 3\vec{c}$$

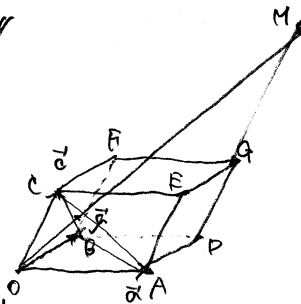
$$\begin{aligned} \text{e) } \vec{ON} &= k\vec{OM} \quad (k: \text{定数}) \\ &= k\vec{a} + k\vec{b} + 3k\vec{c} \end{aligned}$$

N は平面 ABC 上にあるから

$$k + k + 3k = 1 \quad \therefore k = \frac{1}{5}$$

よって

$$\vec{ON} = \frac{1}{5}\vec{a} + \frac{1}{5}\vec{b} + \frac{3}{5}\vec{c}$$



$$\text{III, d) } 10\vec{PA} = \vec{PB} + 2\vec{PC} + 3\vec{PD}$$

$$-10\vec{AP} = \vec{AB} - \vec{AP} + 2(\vec{AC} - \vec{AP}) + 3(\vec{AD} - \vec{AP})$$

$$4\vec{AP} = -\vec{AB} - 2\vec{AC} - 3\vec{AD}$$

$$\therefore \vec{AP} = -\frac{1}{4}\vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC} - \frac{3}{4}\vec{AD}$$



$$\vec{AQ} = \vec{AB} - \vec{AP}$$

$$= \frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC} + \frac{1}{4}\vec{AD} - \vec{AB}$$

$$= \frac{1}{4}(\vec{AC} - \vec{AB}) + \frac{1}{4}(\vec{AD} - \vec{AB})$$

$$= \frac{1}{4}\vec{BC} + \frac{1}{4}\vec{BD} \quad \therefore s = \frac{1}{4}, t = \frac{1}{4}$$

$$\text{e) } 2:5$$

<point>

1. 平面条件 2.

A, P, Q は一直線上にあるから

$$\vec{AQ} = k\vec{AP}$$

$$= -\frac{k}{4}\vec{AB} - \frac{k}{2}\vec{AC} - \frac{3k}{4}\vec{AD}$$

Q は平面 BCD 上にあるから

$$-\frac{k}{4} - \frac{k}{2} - \frac{3}{4}k = 1 \quad \therefore k = -\frac{2}{9}$$