

高2数学 基本問題演習 3. 式と証明

1 [(1) 1996 近畿大 (2) 2000 東北福祉大 (3) 2003 同志社女子大]

(1) 任意の k に対し $(k+2)x+(k+1)y-3k-4=0$ が成り立つならば $x = \boxed{}$,

$y = \boxed{}$ である.

(2) 等式 $x^3-1=a(x-1)(x-2)(x-3)+b(x-1)(x-2)+c(x-1)$ が, x についての恒等式となるように, 定数 a, b, c の値を定めよ.

(3) $x^3+1=(x-2)^3+a(x-2)^2+b(x-2)+c$ がすべての x について成り立つとき, 定数 a, b, c の値を求めよ.

2 [(1) 2011 甲南大 (2) 2005 近畿大 (3) 2008 学習院大]

(1) $f(x)=x^3+ax^2+bx-9$ は $x+3$ で割り切れ, $x-2$ で割ると -5 余る.
このとき, 定数 a, b の値を求めよ.

(2) x^3 の係数が 1 の 3 次式 $P(x)$ は $(x-1)^2$ で割ると $2x+3$ 余り, $x-2$ で割ると 4 余るといふ. このとき, $P(x)$ を求めよ.

(3) 3 次式 $f(x)$ を x^2+x+1 で割ったときの余りが $x+1$ で, x^2+1 で割ったときの余りが $x-1$ であるとする. このとき, $f(x)$ を求めよ.

3 [2006 法政大]

整式 $P(x)$ を x^2+x-6 および x^2-x-2 で割った余りがそれぞれ $4x+5$ および $ax+1$ であるとする. ただし, a は定数とする.

(1) a の値を求めよ.

(2) $P(x)$ を x^3+2x^2-5x-6 で割った余りを求めよ.

4 [I. 2000 山形大 II. 2009 関西大]

I. 整式 $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りが $4x-5$ で, $x+2$ で割ったときの余りが -4 である.

(ア) $P(x)$ を $x-1$ で割ったときの余りを求めよ.

(イ) $P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ.

(ウ) $P(x)$ を $(x-1)^2(x+2)$ で割ったときの余りを求めよ.

II. 整式 $f(x)$ は $x-1$ で割ると余りが 3 である. また, $f(x)$ を x^2+x+1 で割ると余りが $4x+5$ である. このとき, $f(x)$ を x^3-1 で割ったときの余りを求めよ.

高2数学 基本問題演習 3. 式と証明

5 [(1) 2009 愛媛大 (2) 2003 京都大]

(1) i^{2009} を計算せよ。ただし、 i は虚数単位である。また、 x^{2009} を x^2+1 で割ったときの余りを求めよ。

(2) 多項式 $(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1$ は多項式 x^2+x+1 で割り切れるか。

6 [2003 高知大 2006 津田塾大]

(1) a, b, c を実数とする。このとき、 $a^2+b^2+c^2=ab+bc+ca$ が成り立つことは、 $a=b=c$ であることと同値であることを証明せよ。

(2) 実数 a, b, c, d が $\begin{cases} a+b=c+d \\ a^2+b^2=c^2+d^2 \end{cases}$ を満たすとする。

このとき、 $\begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$ または $\begin{cases} a=d \\ b=c \end{cases}$ であることを示せ。

7 [2021 関西大]

a, b, c を実数とするととき、次の不等式を証明せよ。また、等号が成立するための必要十分条件を述べよ。

(1) $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$

(2) $a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$

8 [1998 九州産業大]

x が正の数のとき

(1) $x + \frac{16}{x}$ の最小値は ア であり、 $x + \frac{16}{x+2}$ の最小値は イ である。

(2) $\frac{x}{x^2+16}$ の最大値は ウ であり、このときの x の値は エ である。また、

$\frac{x+2}{x^2+2x+16}$ の最大値は オ であり、このときの x の値は カ である。