

高2数学 基本問題演習 演習 39. 空間ベクトル(2)

①[(1) 2001 慶応義塾大 (2) 2003 関西大]

(1) 空間に原点 O, および 2 点 A (2, 1, -2), B (3, 4, 0) が与えられている.

2 点 A, B 間の距離は $\sqrt{\quad}$, ベクトル $\overrightarrow{OA}$ の大きさは $\sqrt{\quad}$, ベクトル $\overrightarrow{OB}$ の大きさは $\sqrt{\quad}$ である. また, 2 つのベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ の作る角を θ とするとき, $\cos \theta = \frac{\quad}{\quad}$ となり, 三角形 AOB の面積は $\frac{\quad}{\quad}$ である. 2 つのベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ のどちらにも垂直で大きさが $\sqrt{5}$ のベクトルを成分で表すと, $\begin{pmatrix} \quad \\ \quad \\ \quad \end{pmatrix}$ となる.

(2) 2 つのベクトル $\vec{a} = (2, -3, k)$, $\vec{b} = (k, -2, -3)$ のなす角が 60° となる k の値を求めよ.

②[(1) 2008 北見工業大 (2) 2014 成蹊大 (3) 2016 芝浦工業大]

(1) 空間のベクトル $\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{b} = (1, 1, -1)$ が与えられている. t がすべての実数をとって変化するとき, ベクトル $\vec{a} + t\vec{b}$ の長さは, t が $\frac{\quad}{\quad}$ のとき最小値 $\sqrt{\quad}$ をとる.

(2) 1 辺の長さが 1 の正四面体 ABCD において, 辺 AB の中点を M とするとき,

$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CD} = \frac{\sqrt{\quad}}{\sqrt{\quad}} \text{ であり, } \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = \frac{\sqrt{\quad}}{\sqrt{\quad}} \text{ である.}$$

(3) 1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC において, 辺 AB の中点を D, 辺 OC の中点を E とし, $\triangle ABC$ の重心を G とする. このとき, 内積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ の値は $\frac{\quad}{\quad}$ であり, 内積 $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{OG}$ の値は $\frac{\quad}{\quad}$ である.

③[九州大]

1 辺の長さが l の正四面体 OABC で, OA の中点を M, BC の中点を N とする. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}, \overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とするとき,

(1) $\overrightarrow{MN}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表せ.

(2) $\vec{a} \cdot \vec{b}, \vec{b} \cdot \vec{c}, \vec{c} \cdot \vec{a}$ を求めよ.

(3) $\overrightarrow{MN}$ の大きさを求めよ.

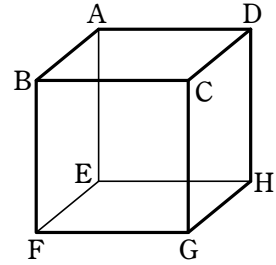
(4) $\overrightarrow{MN}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角を求めよ.

高2数学 基本問題演習 演習 39. 空間ベクトル(2)

4 [I. 2022 上智大 II. 2001 山梨大]

I. 空間内に立方体 $ABCD-EFGH$ がある。

辺 AB を $2:1$ に内分する点を P , 線分 CP の中点を Q とする。



(1) $\overrightarrow{AQ} = \frac{\text{ア}}{\text{イ}} \overrightarrow{AB} + \frac{\text{ウ}}{\text{エ}} \overrightarrow{AD}$ である。

(2) 線分 AG 上の点 R を $\overrightarrow{QR} \perp \overrightarrow{AG}$ となるようにとると,

$\overrightarrow{AR} = \frac{\text{オ}}{\text{カ}} \overrightarrow{AG}$ である。

(3) 直線 QR が平面 $EFGH$ と交わる点を S とすると,

$\overrightarrow{AS} = \frac{\text{キ}}{\text{ク}} \overrightarrow{AB} + \frac{\text{ケ}}{\text{コ}} \overrightarrow{AD} + \frac{\text{サ}}{\text{セ}} \overrightarrow{AE}$ である。

II. 1 辺の長さ 1 の正四面体 $OABC$ において, 4 辺 OA , BC , CO , AB の各辺上にそれぞれ点 P , Q , R , S をとる. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。

(1) P , Q , R , S がそれぞれの辺を $2:1$ に内分しているとき, 次の問いに答えよ。

(ア) $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{RS}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(イ) $\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{RS}$ は垂直であることを示せ。

(2) P , Q , R , S がそれぞれの辺の中点であるとき, 次の問いに答えよ。

(ア) 4 点 P , Q , R , S は同一平面上にあることを示せ。

(イ) 四角形 $PSQR$ はどんな図形になるか。

5 [I. 1998 大阪歯科大 II. 広島大]

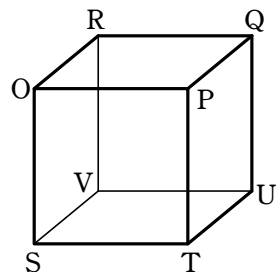
I. 正四面体 $OABC$ の底面 $\triangle ABC$ の重心を G とすると, 直線 OG は, 底面に垂直であることを証明し, 逆に頂点 O から底面 $\triangle ABC$ へ下ろした垂線の足を H とすると, H が $\triangle ABC$ の重心であることを証明せよ。

II. 図のような立方体の対角線 RT の中点を G とし,

$\vec{p} = \overrightarrow{OP}$, $\vec{r} = \overrightarrow{OR}$, $\vec{s} = \overrightarrow{OS}$ とする。

(1) $\overrightarrow{GU}$ を $\vec{p}$, $\vec{r}$ および $\vec{s}$ で表せ。

(2) $\overrightarrow{GU}$ は平面 QTV に垂直であることを証明せよ。



高2数学 基本問題演習 演習 39. 空間ベクトル(2)

6 [福島県立医科大]

1 辺の長さが 1 である正四面体 $OABC$ において辺 OA , BC 上にそれぞれ D , E を,
 $OD : DA = 2 : 1$, $BE : EC = 2 : 1$ となるようにとるとき, 三角形 ODE の面積を求めよ.

7 [I. 大阪教育大 II. 東北大 III. 埼玉大 IV. 京都大]

I. 座標空間において, 3 点 $A(0, -1, 2)$, $B(-1, 0, 5)$, $C(1, 1, 3)$ の定める平面を α とし, 原点 O から平面 α に垂線 OH を下ろす.

- (1) $\triangle ABC$ の面積を求めよ.
- (2) $\overrightarrow{AH} = s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ を満たす s, t を求めよ.
- (3) 点 H の座標を求めよ.
- (4) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ.

II. 四面体 $OABC$ において, $OA = OB = OC = 1$ とする. $\angle AOB = 60^\circ$, $\angle BOC = 45^\circ$, $\angle COA = 45^\circ$ とし, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおく. 点 C から面 OAB に垂線を引き, その交点を H とする.

- (1) ベクトル $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ. (2) CH の長さを求めよ.
- (3) 四面体 $OABC$ の体積を求めよ.

III. 次の条件を満たす四面体 $ABCD$ を考える.

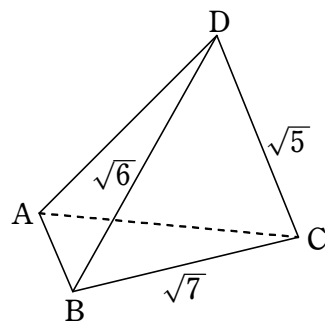
$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2, \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} = 4, \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 3,$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{7}, |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{5}, |\overrightarrow{DB}| = \sqrt{6}$$

- (1) $|\overrightarrow{AB}|$, $|\overrightarrow{AC}|$, $|\overrightarrow{AD}|$ を求めよ.
- (2) 点 D から 3 点 A, B, C を含む平面に下ろした垂線の足を H とする.

$\overrightarrow{DH}$ を $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ を用いて表せ.

- (3) 四面体 $ABCD$ の体積を求めよ.



IV. 空間内に 4 点 $O(0, 0, 0)$, $A(-1, 0, 1)$, $B(2, 2, -1)$, $C(1, 2, 3)$ がある.

- (1) 単位ベクトル $\vec{k} = \left(\begin{smallmatrix} \text{ア} \\ \text{イ} \\ \text{ウ} \end{smallmatrix} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, -1 \begin{smallmatrix} \text{エ} \\ \text{オ} \\ \text{カ} \end{smallmatrix} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}, \begin{smallmatrix} \text{キ} \\ \text{ク} \\ \text{ケ} \end{smallmatrix} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \right)$ は, ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ の両方に垂直である.
- (2) ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角を θ とすると $\cos \theta = \begin{smallmatrix} \text{ク} \\ \text{ケ} \\ \text{コ} \end{smallmatrix} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$ である.
- (3) 三角形 OAB の面積は $\begin{smallmatrix} \text{カ} \\ \text{キ} \\ \text{ク} \end{smallmatrix} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$ であり, 四面体 $OABC$ の体積は $\begin{smallmatrix} \text{ケ} \\ \text{コ} \\ \text{サ} \end{smallmatrix} \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$ である.

高2数学 基本問題演習 演習 39. 空間ベクトル(2)

8 [2017 京都大]

四面体 $OABC$ を考える。点 D, E, F, G, H, I は、それぞれ辺 OA, AB, BC, CO, OB, AC 上にあり、頂点ではないとする。

- (1) $\overrightarrow{DG}$ と $\overrightarrow{EF}$ が平行ならば $AE : EB = CF : FB$ であることを示せ。
- (2) D, E, F, G, H, I が正八面体の頂点となっているとき、これらの点は $OABC$ の各辺の中点であり、 $OABC$ は正四面体であることを示せ。