

基本問題演習 10. 三角関数

□

① 三角形が存在する

$$\begin{cases} a + (a+2) > 2a+1 & \text{常に成立} \\ (a+2) + (2a+1) > a & a > 0 \\ (2a+1) + a > a+2 & a > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\therefore a > \frac{1}{2}$$

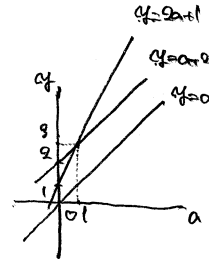
② 最大角の対辺が最大である

$$0 < \frac{1}{2} < a \leq 1$$

$a+2$ の最大角は

$$(a+2)^2 < (2a+1)^2 + a^2$$

$$4a^2 - 3 > 0 \quad \therefore a > \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$\therefore \frac{\sqrt{3}}{2} < a \leq 1$$

③ $a \geq 1$ とする

$2a+1$ の最大角は

$$(2a+1)^2 < (a+2)^2 + a^2$$

$$2a^2 - 3 < 0 \quad \therefore 1 \leq a < \frac{\sqrt{6}}{2}$$

④ $a \geq \frac{\sqrt{6}}{2}$ とする

$$\frac{\sqrt{3}}{2} < a < \frac{\sqrt{6}}{2}$$

<point>

1. 三角形の存在条件

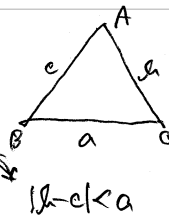
2. 辺の長さ a, b, c と角 A, B, C との関係

$\triangle ABC$ において

$$\begin{cases} a < b+c \\ b < c+a \\ c < a+b \end{cases}$$

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} b < c+a \Leftrightarrow b-c < a \\ c < a+b \Leftrightarrow b-c > -a \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad \Leftrightarrow |b-c| < a < b+c$$



2. 鋭角・直角・鈍角

$\triangle ABC$ において

$$\angle A \text{ が鋭角} \Leftrightarrow a^2 < b^2 + c^2$$

$$\angle A \text{ が直角} \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2$$

$$\angle A \text{ が鈍角} \Leftrightarrow a^2 > b^2 + c^2$$

[証明]

余弦定理より

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$0 < A < 90^\circ \text{ ならば } \cos A > 0 \quad \therefore b^2 + c^2 - a^2 > 0$$

$$\therefore a^2 < b^2 + c^2$$

3. 最大角の対辺が最大である

$$a > b \rightarrow A > B$$

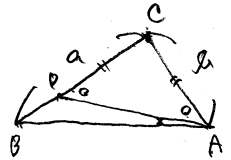
[証明]

$$BC \perp AD \quad CA = CB \quad \therefore \angle B = \angle C$$

$$\angle A = \alpha + x$$

$$\angle B = \alpha - x$$

$$\therefore A > B$$



□

余弦定理より

$$BC^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ$$

$$= 13$$

$$\therefore BC = \sqrt{13}$$

円周角の定理より

$$BP : PC = 4 : 3$$

$\triangle APD$ の面積 S_2

$$S = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ$$

$$= \frac{3\sqrt{3}}{2}$$

$\triangle ABC = \triangle APD + \triangle ACD$ より

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot AD \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot AP \cdot \sin 30^\circ$$

$$3\sqrt{3} = \frac{7}{4} AD$$

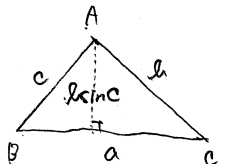
$$\therefore AD = \frac{12\sqrt{3}}{7}$$

<point>

1. 三角形の面積

$\triangle ABC$ の面積 S は

$$S = \frac{1}{2} ab \sin C$$



□

① 余弦定理より

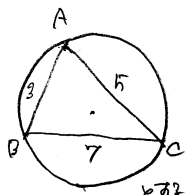
$$7^2 = 3^2 + 5^2 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cos A$$

$$\cos A = \frac{3^2 + 5^2 - 7^2}{2 \cdot 3 \cdot 5} = -\frac{1}{2}$$

$$\therefore A = 120^\circ$$

外接円の半径を R とすると正弦定理より

$$2R = \frac{7}{\sin 120^\circ} \quad \therefore R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$



② $\triangle ABC$ の面積 S_{12}

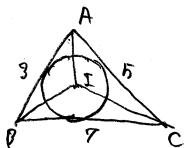
$$S = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5 \cdot \sin 120^\circ = \frac{15\sqrt{3}}{4}$$

③ 14 接円の半径 r とする

$$\triangle ABC = \triangle ABI + \triangle BCI + \triangle CAI$$

$$\frac{15\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} (7+5+3) r$$

$$\therefore r = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



④

① 正弦定理より

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

$$\sin A : \sin B : \sin C = 7 : 5 : 3$$

$$a : b : c = 7 : 5 : 3$$

$$a = 7k, b = 5k, c = 3k \text{ とおす } (k > 0)$$

$$\text{最も長い辺の対角は } \theta = A$$

余弦定理より

$$(7k)^2 = (5k)^2 + (3k)^2 - 2 \cdot 5k \cdot 3k \cdot \cos \theta$$

$$\therefore \cos \theta = \frac{25k^2 + 9k^2 - 49k^2}{30k^2} = -\frac{1}{2} \therefore \theta = 120^\circ$$

② $\triangle ABC$ の面積 S とする

$$S = \frac{1}{2} \cdot (3k) \cdot (5k) \cdot \sin 120^\circ$$

$$= \frac{15\sqrt{3}}{4} k^2 = 4\sqrt{3}$$

$$k^2 = 16 \therefore k = 4$$

よって

$$BC = a = 7 \cdot 4 = 28$$

③ 14 接円の半径 r とする

$$\frac{1}{2} \cdot (7+5+3) \cdot r = 4\sqrt{3}$$

$$\therefore r = 2\sqrt{3}$$

14 接円の面積は

$$\pi (2\sqrt{3})^2 = 12\pi$$

⑤

① $\triangle ABD$ で余弦定理より

$$BD^2 = 2^2 + (\sqrt{3}-1)^2 - 2 \cdot 2 \cdot (\sqrt{3}-1) \cos 90^\circ$$

$$= 8 - 2\sqrt{3} - 6 + 2\sqrt{3}$$

$$= 2$$

$$BD > 0 \therefore BD = \sqrt{2}$$

② $\triangle ABD$ で正弦定理より

$$\frac{2}{\sin \angle ABD} = \frac{\sqrt{2}}{\sin 90^\circ} = \frac{1}{\frac{1}{2}}$$

$$\sin \angle ABD = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

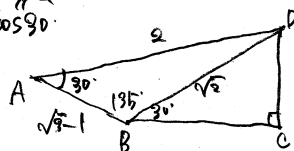
$$\angle ABD > 90^\circ \therefore \angle ABD = 135^\circ$$

$$\textcircled{3} CD = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

④ 14 接円の面積 S_{12}

$$S = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{3} \cdot 1 \cdot \sin 30^\circ + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}-1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}-2}{4}$$



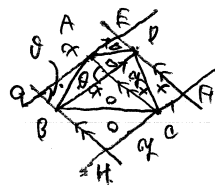
⑥

① ②より、平行四辺形 EFGH

EF // GH

$$S = \frac{1}{2} \times \text{平行四辺形 EFGH}$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \sin \theta$$



$$\textcircled{2} S = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 \sin 60^\circ = 4\sqrt{3}, 0 < \alpha < 4$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \{ -\alpha^2 + 4\alpha \}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} \{ -(\alpha-2)^2 + 4 \}$$

$$\alpha = 2 \text{ とする}$$

$$\text{最大値 } \sqrt{3}$$